Jan van de Craats en Rob Bosch

BASISWISKUNDE

Een oefenboek voor havo, vwo, hbo en universiteit

voorlopige versie, 18 november 2004

Oosterhout, Breda, 2004

Prof.dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit, drs. R. Bosch is docent wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

De typografie van dit boek is met behulp van LaTeX gerealiseerd.
De figuren zijn geprogrammeerd in POSTSCRIPT.
Vormgeving en illustraties: Jan van de Craats.

Inhoudsopgave

Het Griekse alfabet

α	A	alfa	ι	I	jota	ρ	P	rho
β	B	bèta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	mu	υ	Υ	upsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	nu	φ	Φ	phi
ζ	Z	zèta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	èta	o	O	omicron	ψ	Ψ	psi
ϑ	Θ	thèta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

In dit boek werken we met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.

Voorwoord

Dit boek bevat alle basiswiskunde die nodig is als ingangsniveau voor een universitaire of HBO-studie op het gebied van de bètavakken, informatica, economie en verwante studierichtingen. Voor bètastudies zijn alle behandelde onderwerpen van belang, voor informatica en economische richtingen kunnen sommige stukken uit de hoofdstukken 17 (goniometrie), 22 (integratietechnieken) en 23 (toepassingen) terzijde gelaten worden. Met basiswiskunde bedoelen we algebra, getallenrijen, vergelijkingen, meetkunde, functies en calculus (dat wil zeggen differentiaal- en integraalrekening). Kansrekening en statistiek – aparte wiskundevakken met een eigen invalshoek – behandelen we niet.

In de hier gekozen didactische opzet staat oefenen centraal. Net als bij iedere vaardigheid, of het nu om voetballen, pianospelen of het leren van een vreemde taal gaat, is er ook maar één manier om wiskunde onder de knie te krijgen: veel oefenen. Bij voetballen moet je trainen, bij pianospelen studeren en bij het leren van een vreemde taal woordjes leren. Zonder basistechniek kom je nergens; bij wiskunde is het niet anders.

Waarom wiskunde leren? Natuurlijk gaat het de meeste gebruikers uiteindelijk om toepassingen in hun vak. Maar daarbij kun je wiskunde als taal en als instrument niet missen. Wie bijvoorbeeld een studieboek op het gebied van de exacte vakken openslaat, ziet vaak een stortvloed aan formules. Formules die wetmatigheden in het vak uitdrukken die met behulp van wiskundige technieken afgeleid zijn. Via wiskundige bewerkingen worden ze met andere formules gecombineerd om weer nieuwe wetmatigheden op het spoor te komen. Die manipulaties omvatten gewone algebraïsche omvormingen, maar ook het toepassen van logaritmen, exponentiële functies, goniometrie, differentiëren, integreren en nog veel meer. Dat zijn wiskundige technieken die de gebruiker moet leren hanteren. Het invullen van getalswaarden in formules om in een concreet geval een numeriek eindresultaat te verkrijgen, is daarbij slechts bijzaak; waar het om gaat, zijn de ideeën die erachter zitten, de wegen naar nieuwe formules en de nieuwe inzichten die je daardoor verwerft.

Het hoofddoel van wiskundeonderwijs dat voorbereidt op HBO en uni-

versiteit moet dan ook het aanleren van die universele wiskundige vaardigheden zijn. Universeel, omdat dezelfde wiskundige technieken in de meest uiteenlopende vakgebieden toegepast worden. Formulevaardigheid verwerven, daar draait het vooral om. En vaardigheid in het omgaan met functies en hun grafieken. Gecijferdheid, het handig kunnen rekenen en het vlot kunnen werken met getallen, is bij dit alles slechts een klein onderdeel. De rol van een rekenmachine (al dan niet grafisch) is in dit boek dan ook uitermate bescheiden; we zullen er nauwelijks gebruik van maken. Waar zo'n apparaat bij het maken van de opgaven noodzakelijk is, hebben we dat expliciet aangegeven.

Voor wie is dit boek bedoeld? Om te beginnen voor alle scholieren en studenten die zich bij wiskunde onzeker voelen omdat er gaten in hun basiskennis zitten. Zij kunnen hun wiskundige vaardigheden hiermee bijspijkeren. Maar het kan ook gebruikt worden als leerboek of als cursusboek. Door de doordachte, stapsgewijze opbouw van de stof met korte toelichtingen is het geschikt voor zelfstudie. Toch zal het altijd moeilijk blijven een vak als wiskunde helemaal door zelfstudie te leren: de waarde van een goede leraar als gids door de lastige materie kan moeilijk overschat worden.

Hoe zit dit boek in elkaar? Alle hoofdstukken (op de laatste drie na) zijn op dezelfde manier opgebouwd: op de linkerbladzijden opgaven, op de rechterbladzijden de bijbehorende uitleg. De gebruiker wordt uitdrukkelijk uitgenodigd om eerst aan de opgaven links te beginnen. Wie vastloopt, onbekende begrippen of notaties tegenkomt of bepaalde details niet helemaal goed meer weet, raadpleegt de tekst rechts en indien nodig het trefwoordenregister. De opgaven zijn zorgvuldig uitgekozen: eenvoudig beginnen met veel soortgelijke sommen om de vaardigheden goed te oefenen. Met heel kleine stapjes wordt de moeilijkheid geleidelijk opgevoerd. Wie alle sommen van een hoofdstuk gemaakt heeft, kan er zeker van zijn dat hij of zij de stof begrijpt en beheerst.

Bij onze uitleg gaan we niet op alle wiskundige finesses in. Wie meer over de wiskundige achtergronden wil weten, vindt achterin drie hoofdstukken zonder opgaven met verdere verklaringen. Ze staan niet voor niets achterin: alleen wie al behoorlijk wiskundig bedreven is, zal ze kunnen waarderen. En de lezer die er niet aan toe komt, heeft geen probleem: wat voor de toepassingen nodig is, staat in de eerdere hoofdstukken. Een formuleoverzicht, een trefwoordenregister en de volledige antwoordenlijst completeren het boek.

Wij hopen dat onze lezers dit boek met succes en plezier zullen gebruiken.

Oosterhout, Breda, oktober 2004,
Jan van de Craats en Rob Bosch

I Getallen

Dit deel gaat over het rekenen met getallen. Ze komen in allerlei soorten voor: positieve getallen, negatieve getallen, gehele getallen, breuken en irrationale getallen. De getallen $\sqrt{2}$, π en e zijn voorbeelden van irrationale getallen. In de hogere wiskunde wordt ook met imaginaire en complexe getallen gewerkt, maar in dit boek zullen we ons beperken tot de *reële getallen*, dat wil zeggen de getallen die je meetkundig voor kunt stellen als punten op een getallenlijn.

1. Rekenen met gehele getallen

Voer de volgende berekeningen uit:

1.1

a.
$$\begin{array}{rl} 873 & \\ 112 & \\ 1718 & \\ 157 & \\ 3461 & \\ \hline \ldots & + \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 1578 & \\ 9553 & \\ 7218 & \\ 212 & \\ 4139 & \\ \hline \ldots & + \end{array}$$

1.2

a.
$$\begin{array}{rl} 9134 & \\ 4319 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 4585 & \\ 3287 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rl} 7033 & \\ 1398 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

1.3 Bereken:

a. 34×89
b. 67×46
c. 61×93
d. 55×11
e. 78×38

1.4 Bereken:

a. 354×83
b. 67×546
c. 461×79
d. 655×102
e. 178×398

Bereken het quotiënt en de rest met behulp van een staartdeling:

1.5

a. $154 : 13$
b. $435 : 27$
c. $631 : 23$
d. $467 : 17$
e. $780 : 37$

1.6

a. $2334 : 53$
b. $6463 : 101$
c. $7682 : 59$
d. $6178 : 451$
e. $5811 : 67$

1.7

a. $15457 : 11$
b. $4534 : 97$
c. $63321 : 23$
d. $56467 : 179$
e. $78620 : 307$

1.8

a. $42334 : 41$
b. $13467 : 101$
c. $35641 : 99$
d. $16155 : 215$
e. $92183 : 83$

Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen

De rij $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$ is de rij van de *positieve gehele getallen*. Met deze rij leert ieder kind tellen. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van zulke getallen zonder rekenmachine leer je op de basisschool. Hiernaast staan voorbeelden.

$$\begin{array}{rl} 341 & \\ 295 & \\ 718 & \\ 12 & \\ 1431 & \\ \hline 2797 & + \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 8135 & \\ 3297 & \\ \hline 4838 & - \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 431 & \\ 728 & \\ \hline 3448 & \times \\ 862 & \\ 3017 & \\ \hline 313768 & \end{array}$$

Delen met rest

Delen zonder rekenmachine gaat met een *staartdeling*. Hiernaast zie je de staartdeling voor 83218 : 37, dat wil zeggen 83218 gedeeld door 37. Het *quotiënt* 2249 vind je rechtsboven, en de *rest* 5 onderaan de staart. De staartdeling leert dat

$$83218 = 2249 \times 37 + 5.$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$\frac{83218}{37} = 2249 + \frac{5}{37}.$$

Het rechterlid wordt meestal vereenvoudigd tot $2249\frac{5}{37}$, zodat we krijgen

$$\frac{83218}{37} = 2249\frac{5}{37}.$$

```
37 / 83218 \ 2249
     74        ↑
     --
      92     quotiënt
      74
      --
      181
      148
      ---
       338
       333
       ---
         5  ← rest
```

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

1.9
- a. 24
- b. 72
- c. 250
- d. 96
- e. 98

1.10
- a. 288
- b. 1024
- c. 315
- d. 396
- e. 1875

1.11
- a. 972
- b. 676
- c. 2025
- d. 1122
- e. 860

1.12
- a. 255
- b. 441
- c. 722
- d. 432
- e. 985

1.13
- a. 2000
- b. 2001
- c. 2002
- d. 2003
- e. 2004

1.14
- a. je geboortejaar
- b. je postcode
- c. je pincode

Bepaal alle delers van de volgende getallen:

1.15
- a. 12
- b. 20
- c. 32
- d. 108
- e. 144

1.16
- a. 72
- b. 100
- c. 1001
- d. 561
- e. 196

Delers en priemgetallen

Soms gaat een deling op, dat wil zeggen dat de rest nul is. Zo is bijvoorbeeld $238 : 17 = 14$. Dan geldt dus $238 = 14 \times 17$. De getallen 14 en 17 heten *delers* van 238 en de schrijfwijze $238 = 14 \times 17$ heet een *ontbinding in factoren* van 238. De woorden ‘deler’ en ‘factor’ zijn in dit verband synoniemen.

Van de beide delers is 14 zelf ook weer te ontbinden, namelijk als $14 = 2 \times 7$, maar verder kan de ontbinding van 238 niet worden voortgezet, want 2, 7 en 17 zijn alle drie *priemgetallen*, dat wil zeggen getallen die niet in kleinere factoren zijn te ontbinden. Daarmee is de *ontbinding in priemfactoren* van 238 gevonden: $238 = 2 \times 7 \times 17$.

Omdat $238 = 1 \times 238$ ook een ontbinding van 238 is, zijn 1 en 238 ook delers van 238. Elk getal heeft 1 en zichzelf als deler. De interessante, *echte* delers zijn echter de delers die groter dan 1 zijn en kleiner dan het getal zelf. De priemgetallen zijn de getallen die geen echte delers hebben. De rij van alle priemgetallen begint als volgt:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, \ldots$$

Elk geheel getal dat groter dan 1 is, kan ontbonden worden in priemfactoren. Hiernaast staat in voorbeelden geïllustreerd hoe je zo'n *priemontbinding* vindt door systematisch naar steeds grotere priemdelers te zoeken. Telkens als je er een vindt, deel je die uit, en ga je met het quotiënt verder.

$$\begin{array}{c|c} 120 & 2 \\ \hline 60 & 2 \\ \hline 30 & 2 \\ \hline 15 & 3 \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 585 & 3 \\ \hline 195 & 3 \\ \hline 65 & 5 \\ \hline 13 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 3003 & 3 \\ \hline 1001 & 7 \\ \hline 143 & 11 \\ \hline 13 & \end{array}$$

Je bent klaar als het quotiënt zelf een priemgetal is. Uit de drie *ladderdiagrammen* lezen we de priemontbindingen af:

$$\begin{array}{rcl} 120 & = & 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ 585 & = & 3 \times 3 \times 5 \times 13 \\ 3003 & = & 3 \times 7 \times 11 \times 13. \end{array}$$

Bepaal de grootste gemene deler (ggd) van:

1.17
- a. 12 en 30
- b. 24 en 84
- c. 27 en 45
- d. 32 en 56
- e. 34 en 85

1.18
- a. 45 en 225
- b. 144 en 216
- c. 90 en 196
- d. 243 en 135
- e. 288 en 168

1.19
- a. 1024 en 864
- b. 1122 en 1815
- c. 875 en 1125
- d. 1960 en 6370
- e. 1024 en 1152

1.20
- a. 1243 en 1244
- b. 1721 en 1726
- c. 875 en 900
- d. 1960 en 5880
- e. 1024 en 2024

Bepaal het kleinste gemene veelvoud (kgv) van:

1.21
- a. 12 en 30
- b. 27 en 45
- c. 18 en 63
- d. 16 en 40
- e. 33 en 121

1.22
- a. 52 en 39
- b. 64 en 80
- c. 144 en 240
- d. 169 en 130
- e. 68 en 51

1.23
- a. 250 en 125
- b. 144 en 216
- c. 520 en 390
- d. 888 en 185
- e. 124 en 341

1.24
- a. 240 en 180
- b. 276 en 414
- c. 588 en 504
- d. 315 en 189
- e. 403 en 221

Bepaal de ggd en het kgv van:

1.25
- a. 9, 12 en 30
- b. 24, 30 en 36
- c. 10, 15 en 35
- d. 18, 27 en 63
- e. 21, 24 en 27

1.26
- a. 28, 35 en 49
- b. 64, 80 en 112
- c. 39, 52 en 130
- d. 144, 168 en 252
- e. 189, 252 en 315

De ggd en het kgv

Twee getallen kunnen delers gemeen hebben. De *grootste gemene deler* (ggd) is, zoals de naam al zegt, hun grootste gemeenschappelijke deler. Wanneer de ontbinding in priemfactoren van beide getallen bekend is, kan de ggd hieruit direct worden afgelezen. Zo hebben we op bladzijde 7 de volgende priemontbindingen gevonden:

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ 585 &= 3 \times 3 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13. \end{aligned}$$

Hieruit zien we dat

$$\begin{aligned} \text{ggd}(120, 585) &= \text{ggd}(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5\,,\, 3 \times 3 \times 5 \times 13) = 3 \times 5 = 15 \\ \text{ggd}(120, 3003) &= \text{ggd}(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \\ \text{ggd}(585, 3003) &= \text{ggd}(3 \times 3 \times 5 \times 13\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \times 13 = 39. \end{aligned}$$

Het *kleinste gemene veelvoud* (kgv) van twee getallen is het kleinste getal dat zowel een veelvoud van het ene getal, als van het andere getal is. Met andere woorden, het is het kleinste getal dat door allebei die getallen deelbaar is. Ook het kgv kan uit de priemontbindingen worden afgelezen. Zo is

$$\begin{aligned} \text{kgv}(120, 585) &= \text{kgv}(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5\,,\, 3 \times 3 \times 5 \times 13) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13 = 4680. \end{aligned}$$

Een belangrijke eigenschap van de ggd en het kgv van twee getallen is dat hun product gelijk is aan het product van de beide getallen. Zo is

$$\text{ggd}(120, 585) \times \text{kgv}(120, 585) = 15 \times 4680 = 70200 = 120 \times 585.$$

Ook van meer dan twee getallen kun je de ggd en het kgv bepalen. Zo is

$$\text{ggd}(120, 585, 3003) = 3 \quad \text{en} \quad \text{kgv}(120, 585, 3003) = 360360.$$

Een slim idee

Er is een methode om de ggd van twee getallen te bepalen waarbij priemontbindingen niet nodig zijn, en die vaak veel sneller werkt. Het basisidee is dat de ggd van twee getallen ook een deler moet zijn van het *verschil* van die twee getallen. Zie je ook waarom dit zo is?
Zo moet $\text{ggd}(4352, 4342)$ ook een deler zijn van $4352 - 4342 = 10$. Het getal 10 heeft alleen maar de priemdelers 2 en 5. Het is duidelijk dat 5 geen deler is van de beide getallen, maar 2 wel, en dus geldt $\text{ggd}(4352, 4342) = 2$. Wie slim is kan zich door dit idee te gebruiken veel rekenwerk besparen!

2. Rekenen met breuken

2.1 Vereenvoudig:

a. $\frac{15}{20}$

b. $\frac{18}{45}$

c. $\frac{21}{49}$

d. $\frac{27}{81}$

e. $\frac{24}{96}$

2.2 Vereenvoudig:

a. $\frac{60}{144}$

b. $\frac{144}{216}$

c. $\frac{135}{243}$

d. $\frac{864}{1024}$

e. $\frac{168}{288}$

2.3 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{7}$

c. $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{5}$

d. $\frac{7}{11}$ en $\frac{3}{4}$

e. $\frac{2}{13}$ en $\frac{5}{12}$

2.4 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

b. $\frac{3}{10}$ en $\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}$ en $\frac{5}{6}$

d. $\frac{5}{9}$ en $\frac{7}{12}$

e. $\frac{3}{20}$ en $\frac{1}{8}$

2.5 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$

c. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

d. $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{15}$ en $\frac{5}{6}$

e. $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$ en $\frac{3}{8}$

2.6 Maak gelijknamig:

a. $\frac{2}{27}$, $\frac{5}{36}$ en $\frac{5}{24}$

b. $\frac{7}{15}$, $\frac{3}{20}$ en $\frac{5}{6}$

c. $\frac{4}{21}$, $\frac{3}{14}$ en $\frac{7}{30}$

d. $\frac{4}{63}$, $\frac{5}{42}$ en $\frac{1}{56}$

e. $\frac{5}{78}$, $\frac{5}{39}$ en $\frac{3}{65}$

Bepaal telkens welke van de volgende twee breuken de grootste is:

2.7

a. $\frac{5}{18}$ en $\frac{6}{19}$

b. $\frac{7}{15}$ en $\frac{5}{12}$

c. $\frac{9}{20}$ en $\frac{11}{18}$

d. $\frac{11}{36}$ en $\frac{9}{32}$

e. $\frac{20}{63}$ en $\frac{25}{72}$

2.8

a. $\frac{4}{7}$ en $\frac{2}{3}$

b. $\frac{14}{85}$ en $\frac{7}{51}$

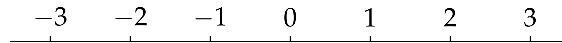
c. $\frac{26}{63}$ en $\frac{39}{84}$

d. $\frac{31}{90}$ en $\frac{23}{72}$

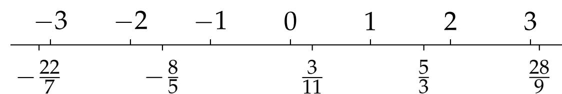
e. $\frac{37}{80}$ en $\frac{29}{60}$

Rationale getallen

De rij ..., $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ is de rij van alle gehele getallen. Een meetkundig beeld ervan geeft de *getallenlijn* die hieronder is getekend.



Ook de *rationale getallen*, dat wil zeggen de getallen die als een breuk geschreven kunnen worden, liggen op de getallenlijn. Hieronder zijn enige rationale getallen op die lijn aangegeven.



In een breuk staan twee gehele getallen, de *teller* en de *noemer*, gescheiden door een horizontale of een schuine breukstreep. Zo is 28 de teller en 6 de noemer van de breuk $\frac{28}{6}$. De noemer van een breuk mag niet nul zijn. Een rationaal getal is een getal dat je als breuk kunt schrijven, maar die schrijfwijze ligt niet ondubbelzinnig vast: als je teller en noemer met hetzelfde gehele getal getal (ongelijk aan nul) vermenigvuldigt of door een gemeenschappelijke deler deelt, verandert de breuk wel, maar het getal niet. Zo is $\frac{28}{6} = \frac{14}{3} = \frac{-14}{-3} = \frac{70}{15}$. Breuken als $\frac{-5}{3}$ en $\frac{22}{-7}$ schrijven we meestal als $-\frac{5}{3}$, respectievelijk $-\frac{22}{7}$. Ook gehele getallen kun je als breuk schrijven, bijvoorbeeld $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = -\frac{3}{1}$ en $0 = \frac{0}{1}$. De gehele getallen behoren dus ook tot de rationale getallen.

Een breuk heet *onvereenvoudigbaar* als de grootste gemene deler (ggd) van teller en noemer 1 is. Zo is $\frac{14}{3}$ een onvereenvoudigbare breuk, maar $\frac{28}{6}$ niet. Je kunt van elke breuk een onvereenvoudigbare breuk maken door teller en noemer te delen door hun ggd.

Breuken heten *gelijknamig* als ze dezelfde noemer hebben. Twee breuken kun je altijd gelijknamig maken door bij elke breuk teller en noemer met dezelfde factor te vermenigvuldigen. Het zuinigste is het om als gemeenschappelijke noemer het kgv van de oorspronkelijke noemers te kiezen.

Bereken:

2.9

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

c. $\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$

e. $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}$

2.10

a. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

b. $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$

c. $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

d. $\frac{4}{9}-\frac{3}{8}$

e. $\frac{5}{11}+\frac{4}{15}$

2.11

a. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{9}-\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}+\frac{1}{12}$

d. $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$

e. $\frac{4}{15}-\frac{3}{10}$

2.12

a. $\frac{2}{45}+\frac{1}{21}$

b. $\frac{5}{27}-\frac{1}{36}$

c. $\frac{5}{72}+\frac{7}{60}$

d. $\frac{3}{34}+\frac{1}{85}$

e. $\frac{7}{30}+\frac{8}{105}$

2.13

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

c. $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$

d. $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-\frac{1}{3}$

e. $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

2.14

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$

e. $\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.15

a. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{12}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}-\frac{1}{18}$

e. $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.16

a. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{2}{15}$

c. $\frac{1}{18}-\frac{7}{30}-\frac{3}{20}$

d. $\frac{3}{14}-\frac{1}{21}+\frac{5}{6}$

e. $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$

2.17

a. $\frac{2}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{10}$

b. $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$

c. $\frac{8}{21}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

d. $\frac{2}{11}-\frac{5}{13}+\frac{1}{2}$

e. $\frac{4}{17}-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$

Optellen en aftrekken van breuken

Optellen van twee gelijknamige breuken is eenvoudig: de noemer blijft hetzelfde en de tellers worden bij elkaar opgeteld. Hetzelfde geldt voor het aftrekken van gelijknamige breuken. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13}+\frac{12}{13}=\frac{17}{13} \qquad \text{en} \qquad \frac{5}{13}-\frac{12}{13}=\frac{-7}{13}=-\frac{7}{13}$$

Zijn de breuken niet gelijknamig, dan moeten ze eerst gelijknamig gemaakt worden. Voorbeelden:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{5}+\frac{8}{3} & = & \frac{6}{15}+\frac{40}{15} & = & \frac{46}{15} \\ -\frac{7}{12}+\frac{4}{15} & = & -\frac{35}{60}+\frac{16}{60} & = & -\frac{19}{60} \\ -\frac{13}{7}-\frac{18}{5} & = & -\frac{65}{35}-\frac{126}{35} & = & -\frac{191}{35} \end{array}$$

Breuken en rationale getallen

Een breuk is een *schrijfwijze* van een rationaal getal. Door teller en noemer met dezelfde factor te vermenigvuldigen, verander je wel de breuk, maar niet het rationale getal dat erdoor wordt voorgesteld. Je kunt ook zeggen dat de *waarde* van de breuk niet verandert als je teller en noemer met dezelfde factor vermenigvuldigt. De breuken $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{6}$ en $\frac{50}{20}$ hebben allemaal dezelfde waarde, en op de getallenlijn hebben ze ook allemaal dezelfde plaats, namelijk halverwege 2 en 3.

In de praktijk is men overigens meestal niet zo precies: vaak wordt 'breuk' gebruikt op plaatsen waar je strikt genomen 'waarde van de breuk' zou moeten zeggen. We doen dat trouwens ook wanneer we schrijven $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ of wanneer we zeggen dat $\frac{5}{2}$ gelijk is aan $\frac{15}{6}$.

Bereken:

2.18

a. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$

b. $\frac{4}{9} \times \frac{2}{5}$

c. $\frac{2}{13} \times \frac{5}{7}$

d. $\frac{9}{13} \times \frac{7}{2}$

e. $\frac{1}{30} \times \frac{13}{10}$

2.19

a. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{2}$

b. $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$

c. $\frac{14}{15} \times \frac{10}{7}$

d. $\frac{25}{12} \times \frac{18}{35}$

e. $\frac{36}{21} \times \frac{28}{27}$

2.20

a. $\frac{63}{40} \times \frac{16}{27}$

b. $\frac{49}{25} \times \frac{30}{21}$

c. $\frac{99}{26} \times \frac{39}{44}$

d. $\frac{51}{36} \times \frac{45}{34}$

e. $\frac{46}{57} \times \frac{38}{69}$

2.21

a. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{15}{4}$

b. $\frac{6}{35} \times \frac{15}{4} \times \frac{14}{9}$

c. $\frac{26}{33} \times \frac{22}{9} \times \frac{15}{39}$

d. $\frac{18}{49} \times \frac{35}{12} \times \frac{4}{21}$

e. $\frac{24}{15} \times \frac{4}{27} \times \frac{45}{16}$

2.22

a. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$

b. $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$

c. $6 : \frac{1}{5}$

d. $\frac{6}{5} : \frac{10}{9}$

e. $\frac{4}{5} : \frac{5}{7}$

2.23

a. $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$

b. $\frac{7}{10} : \frac{21}{15}$

c. $10 : \frac{5}{3}$

d. $\frac{12}{25} : \frac{18}{35}$

e. $\frac{24}{49} : \frac{36}{49}$

2.24

a. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$

b. $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{10}}$

c. $\dfrac{\frac{12}{7}}{\frac{9}{14}}$

2.25

a. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$

b. $\dfrac{\frac{5}{9} + \frac{3}{10}}{\frac{3}{4} - \frac{8}{9}}$

c. $\dfrac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}$

2.26

a. $\dfrac{\frac{2}{7} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}$

b. $\dfrac{\frac{1}{6} - \frac{5}{3}}{\frac{2}{7} - \frac{2}{5}}$

c. $\dfrac{\frac{3}{5} - \frac{11}{12}}{\frac{6}{7} + \frac{3}{11}}$

Vermenigvuldigen en delen van breuken

Het *product* van twee breuken is de breuk die als teller het product van de tellers, en als noemer het product van de noemers heeft. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13}\times\frac{12}{7}=\frac{5\times 12}{13\times 7}=\frac{60}{91} \qquad \text{en} \qquad \frac{8}{7}\times\frac{-5}{11}=\frac{8\times(-5)}{7\times 11}=-\frac{40}{77}.$$

Voor het op elkaar delen van breuken geldt: *delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk.* Voorbeelden:

$$\frac{5}{13}:\frac{12}{7}=\frac{5}{13}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{156} \qquad \text{en} \qquad \frac{8}{7}:\frac{-5}{11}=\frac{8}{7}\times\frac{11}{-5}=-\frac{88}{35}.$$

Soms gebruikt men ook een andere notatie voor het delen van breuken, namelijk met de horizontale breukstreep. Voorbeeld:

$$\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{7}} \qquad \text{i.p.v.} \qquad \frac{5}{13}:\frac{12}{7}$$

Er staat dan dus een 'breuk' met een breuk in de teller en een breuk in de noemer.

Andere notaties voor breuken

In plaats van een horizontale scheidingsstreep tussen teller en noemer wordt soms ook een schuine streep gebruikt: $1/2$ in plaats van $\frac{1}{2}$. Soms is het ook om typografische redenen handiger om de schuine-streepnotatie te gebruiken. De notaties worden ook wel samen gebruikt, vaak ook weer om de typografie overzichtelijker te maken, bijvoorbeeld

$$\frac{5/13}{12/7} \qquad \text{of} \qquad \frac{5}{13}\Big/\frac{12}{7}.$$

In sommige situaties kan het voordelen hebben om breuken in een *gemengde notatie* te schrijven, dat wil zeggen dat men het gehele deel ervan apart zet, bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}$ in plaats van $\frac{5}{2}$. Bij vermenigvuldigen en delen is die notatie echter niet handig, vandaar dat we er in dit boek haast nooit gebruik van zullen maken.

3. Machten en wortels

Schrijf alle volgende uitdrukkingen als een geheel getal of als een onvereenvoudigbare breuk:

3.1

a. 2^3
b. 3^2
c. 4^5
d. 5^4
e. 2^8

3.2

a. $(-2)^3$
b. $(-3)^2$
c. $(-4)^5$
d. $(-5)^4$
e. $(-2)^6$

3.3

a. 2^{-3}
b. 4^{-2}
c. 3^{-4}
d. 7^{-1}
e. 2^{-7}

3.4

a. 2^0
b. 9^{-1}
c. 11^{-2}
d. 9^{-3}
e. 10^{-4}

3.5

a. $(-4)^3$
b. 3^{-4}
c. $(-3)^{-3}$
d. 2^4
e. $(-2)^{-4}$

3.6

a. $(-2)^0$
b. 0^2
c. 12^{-1}
d. $(-7)^2$
e. $(-2)^{-7}$

3.7

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$
b. $\left(\frac{1}{2}\right)^4$
c. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$
d. $\left(\frac{2}{7}\right)^2$

3.8

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
c. $\left(\frac{7}{9}\right)^{-1}$
d. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

3.9

a. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$
b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
c. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$
d. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

3.10

a. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$
b. $\left(\frac{6}{5}\right)^0$
c. $\left(\frac{4}{3}\right)^3$
d. $\left(\frac{5}{2}\right)^{-4}$

3.11

a. $\left(\frac{6}{7}\right)^2$
b. $\left(\frac{8}{7}\right)^0$
c. $\left(\frac{6}{7}\right)^{-2}$
d. $\left(\frac{2}{7}\right)^3$

3.12

a. $\left(\frac{4}{9}\right)^3$
b. $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$
c. $\left(\frac{5}{11}\right)^2$
d. $\left(\frac{3}{6}\right)^{-5}$

Gehele machten

Voor ieder getal a en elk positief geheel getal k is

$$\begin{aligned} a^k &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{k \text{ maal}} \\ a^0 &= 1 \\ a^{-k} &= \frac{1}{a^k}. \end{aligned}$$

Hiermee is a^n voor ieder geheel getal n gedefinieerd. Het getal a heet het *grondtal* en n heet de *exponent*. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 7^4 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^0 &= 1 \\ \left(\frac{3}{8}\right)^{-1} &= \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} \\ 10^{-3} &= \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

Eigenschappen:

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= a^{n+m} \\ a^n : a^m &= a^{n-m} \\ (a^n)^m &= a^{n \times m} \\ (a \times b)^n &= a^n \times b^n \\ (a : b)^n &= a^n : b^n \end{aligned}$$

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm, dat wil zeggen in de vorm $a\sqrt{b}$ waarin a een geheel getal en $\sqrt{b}$ een onvereenvoudigbare wortel is.

3.13
a. $\sqrt{36}$
b. $\sqrt{81}$
c. $\sqrt{121}$
d. $\sqrt{64}$
e. $\sqrt{169}$

3.14
a. $\sqrt{225}$
b. $\sqrt{16}$
c. $\sqrt{196}$
d. $\sqrt{256}$
e. $\sqrt{441}$

3.15
a. $\sqrt{8}$
b. $\sqrt{12}$
c. $\sqrt{18}$
d. $\sqrt{24}$
e. $\sqrt{50}$

3.16
a. $\sqrt{72}$
b. $\sqrt{32}$
c. $\sqrt{20}$
d. $\sqrt{98}$
e. $\sqrt{40}$

3.17
a. $\sqrt{54}$
b. $\sqrt{99}$
c. $\sqrt{80}$
d. $\sqrt{96}$
e. $\sqrt{200}$

3.18
a. $\sqrt{147}$
b. $\sqrt{242}$
c. $\sqrt{125}$
d. $\sqrt{216}$
e. $\sqrt{288}$

3.19
a. $\sqrt{675}$
b. $\sqrt{405}$
c. $\sqrt{512}$
d. $\sqrt{338}$
e. $\sqrt{588}$

3.20
a. $\sqrt{1331}$
b. $\sqrt{972}$
c. $\sqrt{2025}$
d. $\sqrt{722}$
e. $\sqrt{676}$

3.21
a. $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$
b. $\sqrt{10} \times \sqrt{15}$
c. $2\sqrt{14} \times -3\sqrt{21}$
d. $-4\sqrt{22} \times 5\sqrt{33}$
e. $3\sqrt{30} \times 2\sqrt{42}$

3.22
a. $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$
b. $-\sqrt{2} \times \sqrt{7}$
c. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}$
d. $2\sqrt{14} \times 3\sqrt{6}$
e. $3\sqrt{5} \times -2\sqrt{6} \times 4\sqrt{10}$

3.23
a. $3\sqrt{6} \times 2\sqrt{15} \times 4\sqrt{10}$
b. $-5\sqrt{5} \times 10\sqrt{10} \times 2\sqrt{2}$
c. $2\sqrt{21} \times -\sqrt{14} \times -3\sqrt{10}$
d. $\sqrt{15} \times 2\sqrt{3} \times -3\sqrt{35}$
e. $-3\sqrt{30} \times 12\sqrt{14} \times -2\sqrt{21}$

Wortels van gehele getallen

De *wortel* van een getal $a \geq 0$ is het getal w waarvoor geldt dat $w \geq 0$ en $w^2 = a$ is. Notatie: $w = \sqrt{a}$.

Voorbeeld: $\sqrt{25} = 5$ want $5^2 = 25$. Merk op dat ook $(-5)^2 = 25$, dus ook -5 zou men misschien een 'wortel van 25' willen noemen. Zoals in de definitie staat, wordt onder $\sqrt{a}$ echter uitsluitend het *niet-negatieve* getal verstaan waarvan het kwadraat gelijk is aan a, dus $\sqrt{25} = +5$.

Het getal $\sqrt{20}$ is geen geheel getal want $4^2 = 16 < 20$ en $5^2 = 25 > 20$ dus $4 < \sqrt{20} < 5$. Is $\sqrt{20}$ misschien als een breuk te schrijven? Het antwoord is nee: de wortel van een positief geheel getal dat zelf geen kwadraat van een geheel getal is, is altijd *irrationaal*, dat wil zeggen dat men zo'n getal niet als een breuk kan schrijven. Toch kan $\sqrt{20}$ wel worden vereenvoudigd, want $20 = 2 \times 2 \times 5$ dus $\sqrt{20} = 2 \times \sqrt{5}$. Die laatste uitdrukking schrijven we meestal korter als $2\sqrt{5}$.

De wortel $\sqrt{a}$ van een positief geheel getal a heet *onvereenvoudigbaar* als a geen kwadraat van een geheel getal groter dan 1 als deler heeft. Zo zijn $\sqrt{21} = \sqrt{3 \times 7}$, $\sqrt{66} = \sqrt{2 \times 3 \times 11}$ en $\sqrt{91} = \sqrt{7 \times 13}$ onvereenvoudigbare wortels, maar $\sqrt{63}$ niet, want $\sqrt{63} = \sqrt{7 \times 9} = \sqrt{7 \times 3^2} = 3\sqrt{7}$.

Elke wortel van een positief geheel getal kan geschreven worden als een geheel getal of als het product van een geheel getal en een onvereenvoudigbare wortel. Deze schrijfwijze heet de *standaardvorm* van de wortel. Je vindt de standaardvorm door alle kwadraten 'buiten de wortel te halen'. Voorbeeld: $\sqrt{200} = \sqrt{10^2 \times 2} = 10\sqrt{2}$.

Waarom $\sqrt{20}$ irrationaal is

Om aan te tonen dat $\sqrt{20}$ irrationaal is, gebruiken we een *bewijs uit het ongerijmde*: stel dat $\sqrt{20}$ rationaal was. Dan zou je die wortel kunnen schrijven als een breuk p/q waarin p en q positieve gehele getallen zijn met $\text{ggd}(p, q) = 1$. Uit $\sqrt{20} = p/q$ volgt $20q^2 = p^2$ oftewel $2 \times 2 \times 5 \times q^2 = p^2$. Het linkerlid is deelbaar door 5, dus het rechterlid ook. In de priemontbinding van p moet dan minstens één priemfactor 5 zitten, en in de priemontbinding van p^2 zitten dus minstens *twee* factoren 5. Maar $\text{ggg}(p, q) = 1$, en dus bevat de priemontbinding van q géén factoren 5. De priemontbinding van $20q^2$ bevat dus precies één factor 5, terwijl we net hebben aangetoond dat die van p^2 er minstens twee heeft. Dit is in tegenspraak met $20q^2 = p^2$. Onze veronderstelling dat $\sqrt{20}$ rationaal is, heeft dus tot een tegenspraak geleid. Conclusie: het getal $\sqrt{20}$ is irrationaal. Zo'n zelfde irrationaliteitsbewijs kan gegeven worden voor de wortel van elk positief geheel getal dat geen kwadraat is.

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm, dat wil zeggen in de vorm $a\sqrt{b}$ waarin a een geheel getal of een onvereenvoudigbare breuk, en $\sqrt{b}$ een onvereenvoudigbare wortel is.

3.24

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

b. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$

c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2$

d. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3$

e. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3$

3.25

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^3$

b. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^3$

c. $\left(\frac{-\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)^4$

d. $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$

e. $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^5$

3.26

a. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

b. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

c. $\sqrt{\frac{6}{5}}$

d. $\sqrt{\frac{7}{2}}$

e. $\sqrt{\frac{2}{7}}$

3.27

a. $\sqrt{\frac{5}{12}}$

b. $\sqrt{\frac{4}{27}}$

c. $\sqrt{\frac{9}{20}}$

d. $\sqrt{\frac{6}{15}}$

e. $\sqrt{\frac{7}{32}}$

3.28

a. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

c. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$

d. $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

e. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

3.29

a. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

b. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

c. $\frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{20}}$

d. $\frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

e. $\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

Wortels van breuken in standaardvorm

De wortel van een breuk met positieve teller en noemer is het quotiënt van de wortel van de teller en de wortel van de noemer. Zo is $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$. Ter controle: inderdaad is $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

De wortel van een positieve breuk kan altijd geschreven worden als een onvereenvoudigbare breuk of als het product van een onvereenvoudigbare breuk en een onvereenvoudigbare wortel. We noemen dit weer de *standaardvorm* van zo'n wortel. Voorbeelden:

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \qquad \text{en} \qquad \sqrt{\frac{11}{15}} = \sqrt{\frac{11 \times 15}{15 \times 15}} = \frac{1}{15}\sqrt{165}.$$

Je bepaalt zo'n standaardvorm dus door eerst teller en noemer te vermenigvuldigen met een factor die ervoor zorgt dat de noemer een kwadraat van een geheel getal wordt, en dus kan worden getrokken. Wanneer de wortel van de teller dan nog niet in standaardvorm staat, kan die worden vereenvoudigd tot een product van een geheel getal en een onvereenvoudigbare wortel, waarmee dan de gezochte standaardvorm van de wortel van de breuk gevonden is.

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm.

3.30
a. $\sqrt[3]{8}$
b. $\sqrt[4]{81}$
c. $\sqrt[3]{125}$
d. $\sqrt[5]{1024}$
e. $\sqrt[3]{216}$

3.31
a. $\sqrt[3]{-27}$
b. $\sqrt[4]{16}$
c. $\sqrt[5]{243}$
d. $\sqrt[7]{-128}$
e. $\sqrt[2]{144}$

3.32
a. $\sqrt[3]{16}$
b. $\sqrt[4]{243}$
c. $\sqrt[3]{375}$
d. $\sqrt[5]{96}$
e. $\sqrt[3]{54}$

3.33
a. $\sqrt[3]{-40}$
b. $\sqrt[4]{48}$
c. $\sqrt[5]{320}$
d. $\sqrt[3]{432}$
e. $\sqrt[6]{192}$

3.34
a. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$
b. $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{14}$
c. $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4}$
d. $\sqrt[4]{18} \times \sqrt[4]{45}$
e. $\sqrt[5]{16} \times \sqrt[5]{12}$

3.35
a. $\sqrt[4]{24} \times \sqrt[4]{54}$
b. $\sqrt[3]{36} \times \sqrt[3]{12}$
c. $\sqrt[5]{81} \times \sqrt[5]{15}$
d. $\sqrt[6]{288} \times \sqrt[6]{324}$
e. $\sqrt[3]{200} \times \sqrt[3]{35}$

3.36
a. $\sqrt[3]{\frac{1}{343}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{-16}{81}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{32}{-243}}$
d. $\sqrt[2]{\frac{36}{121}}$
e. $\sqrt[4]{\frac{1296}{625}}$

3.37
a. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{216}{1000}}$
e. $\sqrt[2]{\frac{144}{25}}$

3.38
a. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{2}{27}}$
c. $\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$
e. $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$

3.39
a. $\sqrt[3]{\frac{5}{24}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{7}{72}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{5}{648}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{9}{100}}$

3.40
a. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$
b. $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{8}}$
c. $\frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{16}}$
d. $\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{81}}$

3.41
a. $\frac{\sqrt[3]{-3}}{\sqrt[3]{2}}$
b. $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}$
c. $\frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{-27}}$
d. $\frac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{36}}$

Hogeremachtswortels in standaardvorm

De wortels uit de vorige paragraaf worden soms ook *tweedemachtswortels* of *vierkantswortels* genoemd om ze te onderscheiden van de hogeremachtswortels die op een soortgelijke manier worden gedefinieerd.

Zo is de *derdemachtswortel* van een getal a het getal w waarvoor $w^3 = a$. Notatie: $\sqrt[3]{a}$. Voorbeelden: $\sqrt[3]{27} = 3$ want $3^3 = 27$ en $\sqrt[3]{-8} = -2$ want $(-2)^3 = -8$. Merk op dat derdemachtswortels ook uit negatieve getallen kunnen worden getrokken, en dat er geen keuzemogelijkheid voor de wortel is: er is maar één getal waarvan de derdemacht gelijk is aan 27, namelijk 3, en er is ook maar één getal waarvan de derdemacht gelijk is aan -8, namelijk -2.

In het algemeen is de n-demachtswortel $\sqrt[n]{a}$ van a het getal w waarvoor geldt dat $w^n = a$. Wanneer n even is, moet $a \geq 0$ zijn. In dat geval geldt ook $w^n = (-w)^n$, en dus zijn er dan twee mogelijke kandidaat-wortels. Bij afspraak neemt men echter altijd de *niet-negatieve* w waarvoor $w^n = a$.

Er zijn veel overeenkomsten tussen n-demachtswortels en gewone wortels, dat wil zeggen tweedemachtswortels:

- De n-demachtswortel van een geheel getal a is irrationaal tenzij a zelf een n-demacht van een geheel getal is.
- De n-demachtswortel van een positief geheel getal a heet *onvereenvoudigbaar* wanneer a geen n-demacht behalve 1 als deler heeft.
- De n-demachtswortel van een breuk kan geschreven worden als een breuk of als het product van een breuk en een onvereenvoudigbare n-demachtswortel. Dit noemen we weer de *standaardvorm* van die wortel.

Voorbeelden voor derdemachtswortels: $\sqrt[3]{24}$ is niet onvereenvoudigbaar, want $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$, maar $\sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{25}$ en $\sqrt[3]{450}$ zijn wel onvereenvoudigbaar. De standaardvorm van een derdemachtswortel van een breuk bepalen we door teller en noemer met een zodanige factor te vermenigvuldigen dat de noemer een derdemacht wordt. Voorbeeld:

$$\sqrt[3]{\frac{14}{75}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 7}{3 \times 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 7 \times 3^2 \times 5}{3^3 \times 5^3}} = \frac{1}{15}\sqrt[3]{630}.$$

3.42 Schrijf als wortel:

a. $2^{\frac{1}{2}}$
b. $3^{\frac{3}{2}}$
c. $7^{\frac{2}{3}}$
d. $5^{\frac{5}{4}}$
e. $4^{\frac{4}{3}}$

3.43 Schrijf als wortel:

a. $3^{-\frac{1}{2}}$
b. $7^{-\frac{3}{2}}$
c. $4^{-\frac{1}{3}}$
d. $9^{-\frac{2}{5}}$
e. $2^{-\frac{1}{2}}$

3.44 Schrijf als macht:

a. $\sqrt[3]{5}$
b. $\sqrt[2]{7}$
c. $\sqrt[4]{2}$
d. $\sqrt[6]{12}$
e. $\sqrt[5]{5}$

3.45 Schrijf als macht:

a. $\dfrac{1}{\sqrt[2]{5}}$
b. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$
c. $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$
d. $\dfrac{3}{\sqrt[2]{3}}$
e. $\dfrac{7}{\sqrt[5]{7}}$

3.46 Schrijf als macht van 2:

a. $\sqrt[3]{4}$
b. $\sqrt[2]{8}$
c. $\sqrt[4]{32}$
d. $\sqrt[6]{16}$
e. $\sqrt[3]{32}$

3.47 Schrijf als macht van 2:

a. $\dfrac{4}{\sqrt[2]{2}}$
b. $\dfrac{1}{2\sqrt[2]{2}}$
c. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{4}}$
d. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}}$
e. $\dfrac{1}{4\sqrt[3]{16}}$

Schrijf de volgende uitdrukkingen als wortel in standaardvorm.

3.48

a. $\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{2}$
b. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{8} \times \sqrt[3]{16}$
d. $\sqrt[5]{27} \times \sqrt[3]{9}$
e. $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[6]{16}$

3.49

a. $\sqrt[2]{7} \times \sqrt[3]{49}$
b. $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[3]{5}$
d. $\sqrt[5]{81} \times \sqrt[4]{27}$
e. $\sqrt[4]{49} \times \sqrt[2]{7}$

3.50

a. $\sqrt[2]{2} : \sqrt[3]{2}$
b. $\sqrt[3]{9} : \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{8} : \sqrt[2]{2}$
d. $\sqrt[3]{9} : \sqrt[5]{27}$
e. $\sqrt[2]{2} : \sqrt[3]{4}$

Gebroken machten

In deze paragraaf beperken we ons tot machten met een *positief* grondtal. Als $\frac{m}{n}$ een breuk is met $n > 1$ definiëren we

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

In het bijzonder is (neem $m = 1$)

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

dus

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}, \quad \text{enzovoort.}$$

Evenzo is (neem $m = -1$)

$$a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,, \quad a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\,, \quad \text{enzovoort.}$$

Verdere voorbeelden:

$$7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}, \quad 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{4} \quad \text{en} \quad 5^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{25}}.$$

Rekenregels voor machten:

$$\begin{array}{rcl} a^r \times a^s &=& a^{r+s} \\ a^r : a^s &=& a^{r-s} \\ (a^r)^s &=& a^{r \times s} \\ (a \times b)^r &=& a^r \times b^r \\ (a : b)^r &=& a^r : b^r \end{array}$$

Deze rekenregels zijn geldig voor alle rationale getallen r en s en alle positieve getallen a en b.

II Algebra

De algebra is de kunst van het rekenen met letters. Die letters stellen meestal getallen voor. In de eerste twee hoofdstukken van dit deel behandelen we de grondprincipes van de algebra: prioriteitsregels, haakjes uitwerken, termen buiten haakjes brengen, de *bananenformule* en de *merkwaardige producten*. Het laatste hoofdstuk gaat over het rekenen met breuken waarin letters voorkomen, met name over het vereenvoudigen, het onder één noemer brengen en het splitsen van zulke breuken.

4. Rekenen met letters

Bij de volgende opgaven gaat het er om de gegeven waarden in te vullen (te substitueren) in de gegeven algebraïsche uitdrukking en het resultaat te berekenen.

4.1 Substitueer $a = 3$ in
a. $2a^2$
b. $-a^2 + a$
c. $4a^3 - 2a$
d. $-3a^3 - 3a^2$
e. $a(2a - 3)$

4.2 Substitueer $a = -2$ in
a. $3a^2$
b. $-a^3 + a$
c. $3(a^2 - 2a)$
d. $-2a^2 + a$
e. $2a(-a + 3)$

4.3 Substitueer $a = 4$ in
a. $3a^2 - 2a$
b. $-a^3 + 2a^2$
c. $-2(a^2 - 2a)$
d. $(2a - 4)(-a + 2)$
e. $(3a - 4)^2$

4.4 Substitueer $a = -3$ in
a. $-a^2 + 2a$
b. $a^3 - 2a^2$
c. $-3(a^2 - 2a)$
d. $(2a - 1)(-3a + 2)$
e. $(2a + 1)^2$

4.5 Substitueer $a = 3$ en $b = 2$ in
a. $2a^2b$
b. $3a^2b^2 - 2ab$
c. $-3a^2b^3 + 2ab^2$
d. $2a^3b - 3ab^3$
e. $-5ab^2 - 2a^2 + 3b^3$

4.6 Substitueer $a = -2$ en $b = -3$ in
a. $3ab - a$
b. $2a^2b - 2ab$
c. $-3ab^2 + 3ab$
d. $a^2b^2 - 2a^2b + ab^2$
e. $-a^2 + b^2 + 4ab$

4.7 Substitueer $a = 5$ en $b = -2$ in
a. $3(ab)^2 - 2ab$
b. $a(a + b)^2 - (2a)^2$
c. $-3ab(a + 2b)^2$
d. $3a(a - 2b)(a^2 - 2ab)$
e. $(a^2b - 2ab^2)^2$

4.8 Substitueer $a = -2$ en $b = -1$ in
a. $-(a^2b)^3 - 2(ab^2)^2$
b. $-b(3a^2 - 2b)^2$
c. $(3a^2b - 2ab^2)(2a^2 - b^2)$
d. $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
e. $\big((-a^2b + 2b)(ab^2 - 2a)\big)^2$

Prioriteitsregels

Letters in algebraïsche uitdrukkingen stellen in dit deel steeds getallen voor. Met die letters zijn dan ook gelijk rekenkundige bewerkingen gedefinieerd. Zo is $a + b$ de som van a en b, $a - b$ het verschil van a en b, enzovoort.

Bij het vermenigvuldigen vervangen we het maalteken vaak door een punt, of we laten het helemaal weg. We schrijven dus vaak $a \cdot b$ of ab in plaats van $a \times b$. Vaak gebruiken we ook mengvormen van letters en getallen: $2ab$ betekent $2 \times a \times b$. Het is gebruikelijk om in zulke mengvormen het getal voorop te zetten, dus $2ab$ en niet $a2b$ of $ab2$.

Het is gebruikelijk om de volgende *prioriteitsregels* te hanteren:

a. Optellen en aftrekken geschieden in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
b. Vermenigvuldigen en delen geschieden in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
c. Vermenigvuldigen en delen hebben voorrang boven optellen en aftrekken.

We geven hieronder enige voorbeelden waarbij we in het rechterlid de volgorde van de bewerkingen met haakjes expliciet aangeven.

$$\begin{aligned} a - b + c &= (a - b) + c \\ a - bc &= a - (b \times c) \\ a + b : c &= a + (b : c) \\ a : b \times c &= (a : b) \times c \end{aligned}$$

Bij het laatste voorbeeld past de kanttekening dat wanneer men het linkerlid noteert als $a : bc$ velen de neiging zullen hebben om dit op te vatten als $a : (b \times c)$, en dat is echt iets anders! Neem bijvoorbeeld $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, dan is $(a : b) \times c = \frac{3}{2}$ en $a : (b \times c) = \frac{1}{6}$. Het verdient daarom aanbeveling om in gevallen waarin dergelijke misverstanden dreigen, haakjes te gebruiken. Schrijf dus niet $a : bc$ maar $a : (bc)$ wanneer dat laatste de bedoeling is. Meer in het algemeen:

Gebruik haakjes in alle gevallen waarin misverstanden omtrent de volgorde van het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen zouden kunnen ontstaan!

4.9 Substitueer $a = -3$ in

a. $\dfrac{a^2 - a}{a - 1}$

b. $\dfrac{2a - 3}{a^2 - 1}$

c. $\dfrac{-a^3 + a^2}{a^2 - a}$

d. $\dfrac{1}{a - 1} + \dfrac{1}{a + 1}$

e. $\dfrac{a^2 + 1}{2a - 1} - \dfrac{2a - 1}{a^2 + 1}$

4.10 Substitueer $a = -2$ en $b = -3$ in

a. $\dfrac{a^2 b - a}{ab^2 - b}$

b. $\dfrac{(a + b)^2}{(a - b)^2}$

c. $\dfrac{-ab^2 + ab}{a^2 b - ab}$

d. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$

e. $\dfrac{a^2}{a^2 - b^2} - \dfrac{a^2 + b^2}{b^2}$

Schrijf de volgende uitdrukkingen zo eenvoudig mogelijk als een macht of een product van machten.

4.11

a. $a^3 \cdot a^5$

b. $b^3 \cdot b^2$

c. $a^4 \cdot a^7$

d. $b \cdot b^3$

e. $a^7 \cdot a^7$

4.12

a. $(a^2)^3$

b. $(b^3)^4$

c. $(a^5)^5$

d. $(b^4)^2$

e. $(a^6)^9$

4.13

a. $(ab)^4$

b. $(a^2 b^3)^2$

c. $(a^4 b)^3$

d. $(a^2 b^3)^4$

e. $(a^3 b^4)^5$

4.14

a. $a^4 \cdot a^3 \cdot a$

b. $2a^5 \cdot 3a^5$

c. $4a^2 \cdot 3a^2 \cdot 5a^2$

d. $5a^3 \cdot 6a^4 \cdot 7a$

e. $a \cdot 2a^2 \cdot 3a^3$

Schrijf de volgende uitdrukkingen zo eenvoudig mogelijk als een macht of een product van machten.

4.15
a. $(2a^2)^3$
b. $(3a^3b^4)^4$
c. $(4a^2b^2)^2$
d. $(5a^5b^3)^3$
e. $(2ab^5)^4$

4.16
a. $3a^2b \cdot 5ab^4$
b. $6a^3b^4 \cdot 4a^6b^2$
c. $3a^2b^2 \cdot 2a^3b^3$
d. $7a^5b^3 \cdot 5a^7b^5$
e. $8a^2b^4 \cdot 3ab^2 \cdot 6a^5b^4$

4.17
a. $3a^2 \cdot -2a^3 \cdot -4a^5$
b. $-5a^3 \cdot 2a^2 \cdot -4a^3 \cdot 3a^2$
c. $4a^2 \cdot -2a^4 \cdot -5a^5$
d. $2a^4 \cdot -3a^5 \cdot -3a^6$
e. $-3a^2 \cdot -2a^4 \cdot -4a$

4.18
a. $(-2a^2)^3$
b. $(-3a^3)^2$
c. $(-5a^4)^4$
d. $(-a^2b^4)^5$
e. $(-2a^3b^5)^7$

4.19
a. $3a^2 \cdot (2a^3)^2$
b. $(-3a^3)^2 \cdot (2a^2)^3$
c. $(3a^4)^3 \cdot -5a^6$
d. $2a^2 \cdot (5a^3)^3 \cdot 3a^5$
e. $-2a^5 \cdot (-2a)^5 \cdot 5a^2$

4.20
a. $2a^3b^4(-3a^2b^3)^2$
b. $(-2a^2b^4)^3(-3a^2b^5)^2$
c. $2a^2b(-2a^2b)^2(-2a^2b)^3$
d. $3a^4b^2(-3a^2b^4)^3(-2a^3b^2)^2$
e. $(2a^3)^4(-3b^2)^2(2a^2b^3)^3$

4.21
a. $(3a^2b^3c^4)^2(2ab^2c^3)^3$
b. $(-2a^3c^4)^2(-a^2b^3)^3(2b^3c^2)^4$
c. $2a^2c^3(3a^3b^2c)^4(-5ab^2c^5)$
d. $(-2a^3c)^6(5a^3b^2)^2(-5b^3c^4)^4$
e. $-(-3a^2b^2c^2)^3(-2a^3b^3c^3)^2$

4.22
a. $\left((a^3)^4\right)^3$
b. $\left((-a^2)^3(2a^3)^2\right)^2$
c. $\left((2a^2b^3)^2(-3a^3b^2)^3\right)^2$
d. $\left(-2a(-a^3)^2\right)^5$
e. $\left(-2(-a^2)^3\right)^2\left(-3(-a^4)^2\right)^3$

Werk bij de volgende opgaven de haakjes uit.

4.23

a. $3(2a+5)$
b. $8(5a-2)$
c. $-5(3a-2)$
d. $12(-5a+1)$
e. $-7(7a+6)$

4.24

a. $2a(a-5)$
b. $7a(2a+12)$
c. $-13a(9a-5)$
d. $8a(8a-15)$
e. $-21a(3a+9)$

4.25

a. $2a(a^2+9)$
b. $3a^2(4a-7)$
c. $-5a^2(2a^2+4)$
d. $9a^2(a^2+2a)$
e. $-3a(a^2-4a)$

4.26

a. $4a^2(3a^2+2a+3)$
b. $-3a^2(2a^3+5a^2-a)$
c. $7a^3(2a^2+3a-6)$
d. $12a^2(-6a^3-2a^2+a-1)$
e. $-5a^2(3a^4+a^2-2)$

4.27

a. $2(3a+4b)$
b. $-5(2a-5b)$
c. $2a(a+2b)$
d. $16a(-4a+6b)$
e. $-22a(8a-11b)$

4.28

a. $3a(9a+5b-12)$
b. $2a^2(7a-6b)$
c. $-8a^2(7a+4b-1)$
d. $6a^2(-2a+2b+2)$
e. $-13a^2(13a+12b-14)$

4.29

a. $2a^2(3a^2+2b-3)$
b. $-5a^3(2a^2+a-2b)$
c. $2b^2(3a^2+2b^2)$
d. $4a^3(-2a^2+5b^2-2b)$
e. $-14b^3(14a^2+2a-5b^2)$

4.30

a. $2a^2(a^2+3ab)$
b. $-5a^2(3a^2+2ab-3b^2)$
c. $2a^3(3a^3+2a^2b^2-b^2)$
d. $-3a^4(2a^3+2a^2b^2+2ab^2)$
e. $7a^3(-7a^3+3a^2b-4ab^2)$

4.31

a. $2ab(a^2+2ab-b^2)$
b. $-5ab(-3a^2b+2ab^2-6b)$
c. $6ab^2(2a^2b-5ab-b^2)$
d. $-12a^2b^2(-12a^2b^2+6ab-12)$
e. $6ab^2(2a^2b+9ab-ab^2)$

4.32

a. $a^3b^2(-5a^2b^3+2a^2b^2-ab^3)$
b. $-a^2b^3(-a^3b^2-a^2b-14)$
c. $15a^4b^3(-a^3b^4-6a^2b^3+ab^4)$
d. $-a^5b^4(13a^4b^5-12a^2b^3+9ab^5)$
e. $7a^2b^2(-7a^3-7ab^2-1)$

Haakjes uitwerken en buiten haakjes brengen

De *distributieve wetten* luiden:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a(b+c) & = & ab+ac \\ (a+b)c & = & ac+bc. \end{array}}$$

Ze zijn algemeen geldig, welke getallen je ook invult voor a, b en c.
Voorbeelden: $15(3+8) = 15 \times 3 + 15 \times 8 = 45 + 120 = 165$,
$(3-8)(-11) = 3 \times (-11) + (-8) \times (-11) = -33 + 88 = 55$.

Met de distributieve wetten kun je 'haakjes uitwerken', of een term 'buiten haakjes brengen'. Voorbeelden:

$$\begin{array}{rcl} 5a^2(4b-2c) & = & 20a^2b - 10a^2c \\ 3ab(c+2b) & = & 3abc + 6ab^2 \\ (5a-2b)3c^2 & = & 15ac^2 - 6bc^2. \end{array}$$

Let erop dat de distributieve wetten in hun meest eenvoudige, 'kale' vorm zijn geformuleerd, maar dat we bij de voorbeelden voor a, b en c allerlei algebraische uitdrukkingen hebben gesubstitueerd. Het is juist deze mogelijkheid om met formules te manipuleren die de algebra tot zo'n nuttig instrument maakt. Bedenk ook dat het maalteken in al deze voorbeelden weggelaten is. Mét maaltekens luidt het eerste voorbeeld

$$5 \times a^2 \times (4 \times b - 2 \times c) = 20 \times a^2 \times b - 10 \times a^2 \times c$$

waarmee zo'n formule weliswaar omslachtiger, maar voor de beginner wel begrijpelijker wordt.

We kunnen het bovenstaande ook toepassen in samenstellingen en combinaties. Voorbeelden:

$$\begin{array}{l} 3a(4b-2c) + 2b(a-3c) = 12ab - 6ac + 2ab - 6bc = 14ab - 6ac - 6bc \\ 4a(b+c) - 5a(2b-3c) = 4ab + 4ac - 10ab + 15ac = -6ab + 19ac \\ -2a(b-3c) - 5c(a+2b) = -2ab + 6ac - 5ac - 10bc = -2ab + ac - 10bc. \end{array}$$

Let in de laatste twee voorbeelden vooral op de tekens!

Werk de haakjes uit:

4.33
a. $2a(a+6)-4(a+2)$
b. $-4a(3a+6)+2(a-3)$
c. $7a(-2a-1)-2a(-7a+1)$
d. $-8a(a-8)-2(-a+5)$
e. $5a(2a-5)+5(2a-1)$
f. $-2a(a+1)-(a-1)$

4.34
a. $3a(a+2b)-b(-2a+2)$
b. $-a(a-b)+b(-a+1)$
c. $2a(2a+b)-2b(-a+b)-2(a-b)$
d. $-b(-a+2b)+3(2a-b)-a(2a+b)$
e. $5a(a+2b)+2b(5a-b)+ab(2ab+10)$

Breng bij de volgende opgaven zo veel mogelijk factoren buiten haakjes.

4.35
a. $6a+12$
b. $12a+16$
c. $9a-12$
d. $15a-10$
e. $27a+81$

4.36
a. $3a-6b+9$
b. $12a+8b-16$
c. $9a+12b+3$
d. $30a-24b+60$
e. $24a+60b-36$

4.37
a. $-6a+9b-15$
b. $-14a+35b-21$
c. $-18a-24b-12c$
d. $-28a-70b+42c$
e. $-45a+27b-63c-18$

4.38
a. a^2+a
b. a^3-a^2
c. a^3-a^2+a
d. $a^4+a^3-a^2$
e. $a^6-a^4+a^3$

4.39
a. $3a^2+6a$
b. $9a^3+6a^2-3a$
c. $15a^4-10a^3+25a^2$
d. $27a^6-18a^4-36a^2$
e. $48a^4-24a^3+36a^2+60a$

4.40
a. $3a^2b+6ab$
b. $9a^2b-9ab^2$
c. $12ab^2-4ab$
d. $14a^2b^2-21ab^2$
e. $18a^2b^2-15a^2b$

Breng bij de volgende opgaven zo veel mogelijk factoren buiten haakjes.

4.41

a. $3a^3b^2 + 6a^2b$
b. $6a^4b^3 - 9a^3b^2 + 12a^2b$
c. $10a^3b^2c^2 - 5a^2bc^2 - 15abc$
d. $8a^6b^5c^4 - 12a^4b^4c^3 + 20a^3b^4c^3$
e. $a^3b^3c^3 + a^3b^3c^2 + a^3b^3c$

4.42

a. $-4a^2b^3c^2 + 2a^2b^2c^2 - 6a^2bc^2$
b. $a^6b^5c^4 - a^4b^6c^4 - a^3b^7c^3$
c. $-2a^3c^4 + 2a^2b^2c^3 - 4a^2bc^2$
d. $-a^7b^6 + a^6b^7 - a^5b^6$
e. $-a^8b^7c^6 - a^7b^6c^7 + a^6b^6c^6$

4.43

a. $a(b+3) + 3(b+3)$
b. $a(b-1) - 2(b-1)$
c. $2a(b+4) + 7(b+4)$
d. $a^2(2b-1) + 2(2b-1)$
e. $a(b-2) - (b-2)$

4.44

a. $a^2(b+1) - a(b+1)$
b. $6a(2b+1) + 12(2b+1)$
c. $-2a(b-1) + 4(b-1)$
d. $a^3(4b+3) - a^2(4b+3)$
e. $-6a^2(2b+3) - 9a(2b+3)$

4.45

a. $(a+1)(b+1) + 3(b+1)$
b. $(2a-1)(b+1) + (2a-1)(b-1)$
c. $(a+3)(2b-1) + (2a-1)(2b-1)$
d. $(a-1)(a+3) + (a+2)(a+3)$
e. $(a+1)^2 + (a+1)$

4.46

a. $2(a+3)^2 + 4(a+3)$
b. $(a+3)^2(b+1) - 2(a+3)(b+1)$
c. $(a-1)^2(a+2) - (a-1)(a+2)^2$
d. $3(a+2)^2(a-2) + 9(a+2)(a-2)^2$
e. $-2(a+4)^3 + 6(a+4)^2(a+2)$

Werk de haakjes uit.

4.47

a. $(a+3)(a+1)$
b. $(2a+3)(a+3)$
c. $(a-6)(3a+1)$
d. $(4a-5)(5a+4)$
e. $(3a+9)(2a-5)$
f. $(6a-12)(4a+10)$

4.48

a. $(-3a+8)(8a-3)$
b. $(7a+12)(8a-11)$
c. $(17a+1)(a-17)$
d. $(-2a+6)(-3a-6)$
e. $(a+3)(b-5)$
f. $(2a+8)(3b+5)$

4.49

a. $(-4a+1)(b-1)$
b. $(3a-1)(-b+3)$
c. $(13a+12)(12b-13)$
d. $(a^2+4)(a-4)$
e. $(a-1)(a^2+7)$
f. $(a^2+3)(a^2+9)$

4.50

a. $(2a^2-7)(a+7)$
b. $(-3a^2+2)(-2a^2+3)$
c. $(a^2+2a)(2a^2-a)$
d. $(3a^2-4a)(-2a^2+5a)$
e. $(-6a^2+5)(a^2+a)$
f. $(9a^2+7a)(2a^2-7a)$

4.51

a. $(-8a^2-3a)(3a^2-8a)$
b. $(2a^3-a)(-5a^2+4)$
c. $(-a^3+a^2)(a^2+a)$
d. $(9a^4-5a^2)(6a^3+2a^2)$
e. $(7a^3-1)(8a^3-5a)$
f. $(-6a^5-5a^4)(-4a^3-3a^2)$

4.52

a. $(2ab+a)(3ab-b)$
b. $(3a^2b+ab)(2ab^2-3ab)$
c. $(-2a^2b^2+3a^2b)(2ab^2-2ab)$
d. $(8a^3b^2-6ab^3)(-4a^2b^3-2ab^2)$
e. $(-a^5b^3+a^3b^5)(a^3b^5-ab^7)$
f. $(2a+3)(a^2+2a-2)$

4.53

a. $(-3a+2)(4a^2-a+1)$
b. $(2a+b)(a+b+4)$
c. $(-3a+3b)(3a-3b-3)$
d. $(9a+2)(2a-9b+1)$
e. $(a^2+a)(a^2-a+1)$
f. $(2a^2+2a-1)(3a+2)$

4.54

a. $(-2a-1)(-a^2-3a-4)$
b. $(a-b-1)(a+b)$
c. $(a^2+ab+b^2)(a^2-b^2)$
d. $(a+1)(a+2)(a+3)$
e. $(a-1)(a+2)(a-3)$
f. $(2a+1)(a-1)(2a+3)$

4.55

a. $(2a+b)(a-b)(2a-b)$
b. $(5a-4b)(4a-3b)(3a-2b)$
c. $-3a(a^2+3)(a-2)$
d. $(-3a+1)(a+3)(-a+1)$
e. $2a^2(a^2-1)(a^2+2)$
f. $(a^2b-ab)(ab^2+ab)(a+b)$

4.56

a. $3a^2b(a^2-b^2)(2a+2b)$
b. $(a+1)(a^3+a^2-a+2)$
c. $(a^2+2a+1)(a^2-a+2)$
d. $(-2a^2+3a+1)(3a^2-2a-1)$
e. $3a(a^2+1)(a^2-2a+4)$
f. $(2a+b-5)(5a-2b+2)$

De bananenformule

Voor het product van twee sommen van twee termen geldt de formule

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

die, zoals de boogjes al aangeven, ontstaat door twee maal een distributieve wet toe te passen:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

De boogjes vormen een handig geheugensteuntje; vanwege de vorm van de boogjes wordt deze formule soms de *bananenformule* genoemd. Ook deze formule kan weer in allerlei gecompliceerdere situaties gebruikt worden. Voorbeeld:

$$(3a^2 + 7bc)(5ab - 2c) = 15a^3b - 6a^2c + 35ab^2c - 14bc^2.$$

In sommige gevallen kunnen na uitwerken van de haakjes met behulp van de bananenformule nog termen worden samengenomen. Voorbeeld:

$$(5a + 3b)(2a - 7b) = 10a^2 - 35ab + 6ab - 21b^2 = 10a^2 - 29ab - 21b^2.$$

Wanneer er meer dan twee termen tussen haakjes staan, gaat het uitwerken volgens hetzelfde principe als bij de bananenformule. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(3a + 2b)(2c - d + 8e) &= 3a(2c - d + 8e) + 2b(2c - d + 8e)\\ &= 6ac - 3ad + 24ae + 4bc - 2bd + 16be.\end{aligned}$$

5. Merkwaardige producten

Werk de haakjes uit:

5.1
a. $(a+6)^2$
b. $(a-2)^2$
c. $(a+11)^2$
d. $(a-9)^2$
e. $(a+1)^2$

5.2
a. $(b+5)^2$
b. $(b-12)^2$
c. $(b+13)^2$
d. $(b-7)^2$
e. $(b+8)^2$

5.3
a. $(a+14)^2$
b. $(-b+5)^2$
c. $(a-15)^2$
d. $(-b-2)^2$
e. $(-a+10)^2$

5.4
a. $(2a+5)^2$
b. $(3a-6)^2$
c. $(11a+2)^2$
d. $(4a-9)^2$
e. $(13a+14)^2$

5.5
a. $(5b+2)^2$
b. $(2a-3)^2$
c. $(9b+7)^2$
d. $(4a-3)^2$
e. $(8b+1)^2$

5.6
a. $(2a+5b)^2$
b. $(3a-13b)^2$
c. $(a+2b)^2$
d. $(2a-b)^2$
e. $(6a+7b)^2$

5.7
a. $(12a-5b)^2$
b. $(-2a+b)^2$
c. $(7a-5b)^2$
d. $(-14a+3)^2$
e. $(a+11b)^2$

5.8
a. $(a^2+5)^2$
b. $(a^2-3)^2$
c. $(b^2-1)^2$
d. $(a^3+2)^2$
e. $(b^4-7)^2$

5.9
a. $(2a+7b)^2$
b. $(3a+8b)^2$
c. $(5a-9b)^2$
d. $(7a-8b)^2$
e. $(6a-11b)^2$

5.10
a. $(a^2+3)^2$
b. $(b^2-4)^2$
c. $(2a^3-13)^2$
d. $(5b^2+14)^2$
e. $(-12a^3-5)^2$

5.11
a. $(2a^2-3b)^2$
b. $(3a^2+2b)^2$
c. $(9a^2-5b^2)^2$
d. $(12a^3+2b^2)^2$
e. $(20a^2-6b^3)^2$

5.12
a. $(2a+3)^2+(a-1)^2$
b. $(a-5)^2-(a+4)^2$
c. $(3a-1)^2-(2a-3)^2$
d. $(2a+b)^2+(a+2b)^2$
e. $(-7a^2+9b^2)^2-(9a^2-7b^2)^2$

Enige bijzondere gevallen van de bananenformule worden zo vaak gebruikt dat ze een eigen naam gekregen hebben. Ze heten *merkwaardige producten*.

Het kwadraat van een som of een verschil

De eerste twee merkwaardige producten die we hier behandelen verschillen alleen in het teken. Eigenlijk zou het tweede product niet apart vermeld hoeven te worden, want het ontstaat uit het eerste door b te vervangen door $-b$. Toch is het handig om de beide gevallen paraat te hebben.

$$\boxed{\begin{array}{rcl}(a+b)^2 &=& a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &=& a^2-2ab+b^2.\end{array}}$$

Men leidt ze als volgt uit de bananenformule af:

$$\begin{array}{l}(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2.\end{array}$$

Als vermakelijke, maar op zichzelf natuurlijk niet erg belangrijke toepassing berekenen we 2003^2 en 1998^2 uit het hoofd: $2003^2 = (2000+3)^2 = 2000^2 + 2\times 2000\times 3 + 3^2 = 4\,000\,000 + 12\,000 + 9 = 4\,012\,009$ en
$1998^2 = 2000^2 - 2\times 2000\times 2 + 2^2 = 4\,000\,000 - 8\,000 + 4 = 3\,992\,004$.

Belangrijker zijn natuurlijk de algebraïsche toepassingen, dat wil zeggen toepassingen waarbij formules in een andere vorm worden geschreven. Via de opgaven kun je jezelf daarin bekwamen.

Het verschil van twee kwadraten

Het volgende merkwaardige product gaat over het verschil van twee kwadraten:

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

Ook dit product kan direct uit de bananenformule worden afgeleid:

$$(a+b)(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = a^2-b^2.$$

Als vermakelijke toepassing berekenen we uit het hoofd: $1997\times 2003 = 2000^2 - 3^2 = 4\,000\,000 - 9 = 3\,999\,991$.

Ook hier gaat het natuurlijk weer vooral om de algebraïsche toepassingen, dat wil zeggen toepassingen waarbij formules in een andere vorm worden geschreven.

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren:

5.13
a. $a^2 - 16$
b. $a^2 - 1$
c. $a^2 - 144$
d. $a^2 - 81$
e. $a^2 - 121$

5.14
a. $a^2 - 36$
b. $a^2 - 4$
c. $a^2 - 169$
d. $a^2 - 256$
e. $a^2 - 1024$

5.15
a. $4a^2 - 9$
b. $9a^2 - 1$
c. $16a^2 - 25$
d. $25a^2 - 81$
e. $144a^2 - 169$

5.16
a. $36a^2 - 49$
b. $64a^2 - 121$
c. $400a^2 - 441$
d. $196a^2 - 225$
e. $144a^2 - 49$

5.17
a. $a^2 - b^2$
b. $4a^2 - 25b^2$
c. $9a^2 - b^2$
d. $16a^2 - 81b^2$
e. $196a^2 - 169b^2$

5.18
a. $a^2b^2 - 4$
b. $a^2b^2 - 625$
c. $9a^2b^2 - 25c^2$
d. $25a^2 - 16b^2c^2$
e. $100a^2b^2 - 9c^2$

5.19
a. $a^4 - b^2$
b. $25a^4 - 16b^2$
c. $16a^4 - b^4$
d. $81a^4 - 16b^4$
e. $256a^4 - 625b^4$

5.20
a. $a^4b^2 - 1$
b. $a^2b^4 - c^2$
c. $a^4 - 81b^4c^4$
d. $a^8 - b^8$
e. $256a^8 - b^8$

5.21
a. $a^3 - a$
b. $8a^2 - 50$
c. $27a^2 - 12b^2$
d. $125a^3 - 45a$
e. $600a^5 - 24a^3$

5.22
a. $3a^2b^3 - 27b$
b. $128a^3b^3 - 18ab$
c. $a^6b^3 - a^2b$
d. $-5a^3b^3c + 125abc$
e. $3a^2b - 3b$

5.23

a. $a^5 - a$
b. $2a^5 - 32a$
c. $a^5b^5 - 81ab$
d. $-a^7 + 625a$
e. $a^9b - 256ab^9$

5.24

a. $(a+3)^2 - (a+2)^2$
b. $(2a-1)^2 - (a+2)^2$
c. $(a+5)^2 - (2a+3)^2$
d. $(a+1)^2 - (3a-1)^2$
e. $(2a+1)^2 - (3a+2)^2$

Werk de haakjes uit:

5.25

a. $(a-2)(a+2)$
b. $(a+7)(a-7)$
c. $(a-3)(a+3)$
d. $(a+12)(a-12)$
e. $(a-11)(a+11)$

5.26

a. $(2a-5)(2a+5)$
b. $(3a-1)(3a+1)$
c. $(4a+3)(4a-3)$
d. $(9a-12)(9a+12)$
e. $(13a+14)(13a-14)$

5.27

a. $(6a-9)(6a+9)$
b. $(15a-1)(15a+1)$
c. $(7a-8)(7a+8)$
d. $(16a+5)(16a-5)$
e. $(21a+25)(21a-25)$

5.28

a. $(a^2-5)(a^2+5)$
b. $(a^2+9)(a^2-9)$
c. $(2a^2-3)(2a^2+3)$
d. $(6a^2-5)(6a^2+5)$
e. $(9a^2-11)(9a^2+11)$

5.29

a. $(a^3-4)(a^3+4)$
b. $(a^5+10)(a^5-10)$
c. $(9a^2+2)(9a^2-2)$
d. $(11a^4-3)(11a^4+3)$
e. $(12a^6+13)(12a^6-13)$

5.30

a. $(2a+3b)(2a-3b)$
b. $(6a-10b)(6a+10b)$
c. $(9a+2b)(9a-2b)$
d. $(7a-5b)(7a+5b)$
e. $(a-20b)(a+20b)$

5.31

a. $(a^2+b)(a^2-b)$
b. $(2a^2+3b)(2a^2-3b)$
c. $(5a^2-3b^2)(5a^2+3b^2)$
d. $(6a^2-11b^2)(6a^2+11b^2)$
e. $(13a^2+15b^2)(13a^2-15b^2)$

5.32

a. $(a^3+2b^2)(a^3-2b^2)$
b. $(2a^2+9b^3)(2a^2-9b^3)$
c. $(5a^4+3b^3)(5a^4-3b^3)$
d. $(7a^2-19b^4)(7a^2+19b^4)$
e. $(15a^5-8b^4)(15a^5+8b^4)$

5.33

a. $(2ab+c)(2ab-c)$
b. $(3a^2b+2c)(3a^2b-2c)$
c. $(5ab^2+c^2)(5ab^2-c^2)$
d. $(9a^2b^2-4c^2)(9a^2b^2+4c^2)$
e. $(18a^3b^2-7c^3)(18a^3b^2+7c^3)$

5.34

a. $(2a^2-3bc^2)(2a^2+3bc^2)$
b. $(7a^3b-8c^3)(7a^3b+8c^3)$
c. $(13a^5b^3+14c^5)(13a^5b^3-14c^5)$
d. $(5abc+1)(5abc-1)$
e. $(9a^2bc^3+7)(9a^2bc^3-7)$

Gemengde opgaven: werk steeds de haakjes uit

5.35

a. $(a+4)^2$
b. $(a+4)(a-4)$
c. $(a+4)(a+3)$
d. $4(a+3)$
e. $(a-4)(a+3)$

5.36

a. $(a-7)(a+6)$
b. $(a+7)^2$
c. $(a-6)(a+6)$
d. $(a-6)^2$
e. $(2a+6)(a-6)$

5.37

a. $(a+13)^2$
b. $(a-14)^2$
c. $(a+13)(a-14)$
d. $(a-13)(3a+13)$
e. $(13a-14)(14a+13)$

5.38

a. $(2a+8)^2$
b. $(a-8)(a-2)$
c. $2a(a-8)+a(a-2)$
d. $(2a-8)(2a+8)$
e. $(2a+4)(a+2)$

5.39

a. $(a-17)(a+4)$
b. $(a-17)^2$
c. $(a+17)(a-4)$
d. $(4a-17)(4a+17)$
e. $(4a+17)(17a-4)$

5.40

a. $(a+21)^2$
b. $(a+21)(a-12)$
c. $(21a-12)(21a+12)$
d. $(a-12)^2$
e. $(12a-21)(a+12)$

5.41

a. $(a^2-4)(a^2+2a+1)$
b. $(a-2)(a+2)(a+1)^2$
c. $((a-1)(a+1))^2$
d. $(4a^2+24a+9)(a^2-1)$
e. $(a-1)(a+1)(2a+3)^2$

5.42

a. $(a^2+2a+1)(a^2-2a+1)$
b. $(a+1)^2(a-1)^2$
c. $(a^2-1)^2$
d. $(2a+3)^2(2a-3)^2$
e. $(a+1)^4$

5.43
a. $(a^2+1)(a-1)(a+1)$
b. $2a(2a+3)(2a-3)$
c. $(a-2)(a^2+4)(a+2)$
d. $6a^2(3a^2+2)(3a^2-2)$
e. $2a(a-5)(a^2+25)(a+5)$

5.44 Bereken uit het hoofd:
a. $17 \cdot 23$
b. $45 \cdot 55$
c. $69 \cdot 71$
d. $93 \cdot 87$
e. $66 \cdot 74$

5.45
a. $(a+1)^2+(a+5)^2$
b. $(a+5)(a-5)+(a-1)^2$
c. $(a+1)(a+5)-(a-1)(a-5)$
d. $(5a+1)(a-1)+(a-5)(a+1)$
e. $(5a-1)(5a+1)-(5a-1)^2$

5.46
a. $(3a-7)(3a+7)-(3a-7)^2$
b. $3a(3a+7)-7a(3a+7)$
c. $(9a+2)^2-(a^2-2)(a^2+2)$
d. $(a^2+2)(a^2+3)-(a^2-2)^2$
e. $(a^2-1)(a^2+1)+(a^2+1)^2$

5.47
a. $(a-1)(a+1)(a+2)(a-2)$
b. $(a+5)(a-4)(a-5)(a+4)$
c. $(a^2+1)(a^2-1)(a^2+2)(a^2-2)$
d. $(a+2)(a+1)^2$
e. $(a+2)^3$

5.48
a. $2a(a+1)^2-3a(a+3)^2$
b. $-a(a+2)(a-2)+a(a+2)^2$
c. $2a(a+2)(a+3)-3a(a-2)(a-3)$
d. $5a(a-5)^2+25(a+5)(a-5)$
e. $a^2(a+3)(a-1)-(a^2+1)(a^2-3)$

6. Breuken met letters

Splits in breuken met slechts één term in de teller.

6.1

a. $\dfrac{a+3}{a-3}$

b. $\dfrac{2a+3b}{a-b}$

c. $\dfrac{a^2+3a+1}{a^2-3}$

d. $\dfrac{2a-b+3}{ab-3}$

e. $\dfrac{2-5a}{b-a^3}$

6.2

a. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

b. $\dfrac{ab+bc-ca}{a-2b}$

c. $\dfrac{b^2-1}{a^2-1}$

d. $\dfrac{4abc+5}{c-ab}$

e. $\dfrac{5ab^2-abc}{ab-c}$

Breng onder één noemer. Werk daarna in het eindresultaat alle haakjes uit.

6.3

a. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a+3}$

b. $\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{1}{a+3}$

c. $\dfrac{2}{a-3}-\dfrac{1}{a+3}$

d. $\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{a}{a+3}$

e. $\dfrac{a}{a-3}-\dfrac{a}{a+3}$

6.4

a. $\dfrac{a+1}{a-2}-\dfrac{a-1}{a+3}$

b. $\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}$

c. $\dfrac{a}{a+4}-\dfrac{a}{a+3}$

d. $\dfrac{3a-5}{a-1}+\dfrac{2a+3}{a-2}$

e. $\dfrac{4-a}{4+a}-\dfrac{2+a}{2-a}$

6.5

a. $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a-2b}$

b. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}$

c. $\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{2a}{a-2}$

d. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{a}{2a+3b}$

e. $\dfrac{a+b}{a-3}-\dfrac{a-b}{a+3}$

6.6

a. $\dfrac{a+b}{a-c}-\dfrac{a-b}{a+c}$

b. $\dfrac{2a+1}{a-b}+\dfrac{a-2}{a+b}$

c. $\dfrac{4-a}{a+4b}-\dfrac{ab}{4a+b}$

d. $\dfrac{a-5c}{b-c}+\dfrac{2b+3}{a-b}$

e. $\dfrac{a}{4+a+b}-\dfrac{2+a}{4-a+b}$

Splitsen en onder één noemer brengen

Ook in breuken kunnen letters voorkomen. Voorbeelden:

$$\frac{a+3b}{2a-5c}, \quad \frac{b}{a^2-1}, \quad \frac{a+b}{1+a^2+b^2}$$

Het worden gewone breuken zodra je getallen voor de letters invult. Het enige waar je bij dat invullen voor op moet passen, is dat de noemer niet nul mag worden. Zo mag je in de eerste breuk bijvoorbeeld niet $a = 5$ en $c = 2$ invullen, en in de tweede breuk niet $a = 1$ of $a = -1$. In het vervolg zullen we dergelijke voorwaarden meestal niet expliciet vermelden. We gaan er dan stilzwijgend van uit dat de getalswaarden van de letters, als ze gekozen worden, buiten deze 'verboden' gebieden blijven.

Het rekenen met breuken waarin letters voorkomen, gaat in principe op dezelfde manier als het rekenen met gewone breuken. Wat veel voorkomt, is het splitsen van breuken of het onder één noemer brengen als tussenstap bij het optellen of aftrekken. We geven een paar voorbeelden. Bij het eerste voorbeeld wordt de breuk uit elkaar gehaald en bij de andere voorbeelden worden de breuken eerst onder één noemer gebracht en vervolgens samengevoegd.

1. $\dfrac{a+3b}{2a-5c} = \dfrac{a}{2a-5c} + \dfrac{3b}{2a-5c}$ (splitsen).

2. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2}{ab} - \dfrac{b^2}{ab} = \dfrac{a^2-b^2}{ab}$ (onder één noemer brengen).

3. $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{a+1}{(a-1)(a+1)} - \dfrac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{2}{a^2-1}.$

4. $$\begin{aligned}\frac{a+3b}{2a-5} + \frac{b}{a^2-1} &= \frac{(a+3b)(a^2-1)}{(2a-5)(a^2-1)} + \frac{b(2a-5c)}{(a^2-1)(2a-5)} \\ &= \frac{(a+3b)(a^2-1)+b(2a-5)}{(2a-5)(a^2-1)}.\end{aligned}$$

Indien gewenst kun je in het laatste voorbeeld in de teller en de noemer van het eindresultaat nog de haakjes uitwerken.

Vereenvoudig de volgende breuken zoveel mogelijk.

6.7

a. $\dfrac{3a+18}{9b-6}$

b. $\dfrac{a^2+a}{a+1}$

c. $\dfrac{4a-2}{2a^2-a}$

d. $\dfrac{a+2b}{a^2-4b^2}$

e. $\dfrac{ab+b^3}{b^2-3b}$

6.8

a. $\dfrac{a^2b+ab^2}{3abc}$

b. $\dfrac{a^2-4a}{a+2a^2}$

c. $\dfrac{4ab-3ab^2}{a^2-abc}$

d. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

e. $\dfrac{a^4-b^2}{a^2-b}$

Breng onder één noemer en vereenvoudig zo mogelijk.

6.9

a. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a^2-9}$

b. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{a}{a^2-9}$

c. $\dfrac{a^2+1}{a-3}-\dfrac{a^2-1}{a+3}$

d. $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{b-a}$

e. $\dfrac{a^2-1}{a-1}-\dfrac{a^2+1}{a+1}$

6.10

a. $\dfrac{a+b}{a-2b}-\dfrac{a-2b}{a+b}$

b. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}+a-1$

c. $\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{2}{4-a^2}$

d. $\dfrac{3a-2b}{a-b}+\dfrac{2a+3b}{3a}$

e. $\dfrac{4-a}{a}-\dfrac{4+a}{2a}$

Breuken vereenvoudigen

Net zoals bij gewone breuken, kun je ook bij breuken met letters soms vereenvoudigingen aanbrengen door teller en noemer door hetzelfde getal te delen:

$$\frac{3a + 9b^2}{6a - 3} = \frac{a + 3b^2}{2a - 1}$$

Teller en noemer zijn hier door 3 gedeeld. Ook deler door een letter is soms mogelijk:

$$\frac{7b}{b + 2b^3} = \frac{7}{1 + 2b^2}.$$

Er zit hier echter een addertje onder het gras: we hebben teller en noemer door b gedeeld, maar dat mag alleen als $b \neq 0$ is. Het linkerlid is voor $b = 0$ namelijk niet gedefinieerd (want dan staat er $\frac{0}{0}$), terwijl het rechterlid voor $b = 0$ gewoon het getal 7 als uitkomst levert. Wanneer we precies zijn, moeten we dus eigenlijk zeggen

$$\frac{7b}{b + 2b^3} = \frac{7}{1 + 2b^2} \quad \text{als} \quad b \neq 0.$$

Nog een voorbeeld:

$$\frac{a^2 - 4}{a - 2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a - 2} = a + 2 \quad \text{als} \quad a \neq 2.$$

Hierin is de teller eerst via het merkwaardige product $a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$ in twee factoren gesplitst, waarna een van beide factoren weggedeeld kon worden, met natuurlijk als voorwaarde dat die factor niet nul mag zijn, vandaar $a \neq 2$.

In het volgende voorbeeld is de voorwaarde iets ingewikkelder omdat er twee letters in voorkomen:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a + b} = a - b \quad \text{als} \quad a + b \neq 0.$$

Hierin levert de voorwaarde $a + b \neq 0$ dus oneindig veel combinaties van a en b op waarbij het linkerlid $\frac{0}{0}$ geeft en dus niet gedefinieerd is, maar het rechterlid gewoon een getalswaarde voorstelt. Neem bijvoorbeeld $a = 1$ en $b = -1$, dan is het linkerlid $\frac{0}{0}$, maar het rechterlid is 2. Of neem $a = -137$ en $b = 137$, waardoor het rechterlid -274 wordt terwijl het linkerlid weer $\frac{0}{0}$ geeft.

III Getallenrijen

Als je de formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ wilt generaliseren tot formules voor $(a+b)^3$, $(a+b)^4, \ldots$, ontdek je al snel regelmatige patronen. Je kunt ze rangschikken in de *driehoek van Pascal*. De getallen in die driehoek zijn de *binomiaalcoëfficiënten*. We zullen laten zien hoe je ze snel kunt berekenen. Het *binomium van Newton* geeft een algemene uitdrukking voor de formule voor $(a+b)^n$ in termen van de binomiaalcoëfficiënten. We introduceren daarbij de ook elders in de wiskunde veel gebruikte *sigma-notatie* voor sommen van getallenrijen. In een volgend hoofdstuk stappen we over op rekenkundige en meetkundige getallenrijen en hun somformules. Ten slotte leggen we uit wat we in het algemeen verstaan onder de *limiet* van een getallenrij.

7. Faculteiten en binomiaalcoëfficiënten

Werk met behulp van de formules op de volgende bladzijde de haakjes uit en vereenvoudig indien mogelijk:

7.1

a. $(a+1)^3$
b. $(a-1)^3$
c. $(2a-1)^3$
d. $(a+2)^3$
e. $(2a-3)^3$

7.2

a. $(1-a^2)^3$
b. $(ab+1)^3$
c. $(a+2b)^3$
d. $(a^2-b^2)^3$
e. $(2a-5b)^3$

7.3

a. $(2a-1)^3+(a-2)^3$
b. $(a-2b)^3$
c. $(a+3b)^3$
d. $(5a+2)^3$
e. $(a-7)^3+(a+7)^3$

7.4

a. $(a^2-b)^3$
b. $(a^4+2b^2)^3$
c. $(a+2b)^3+(a-2b)^3$
d. $(a+2b)^3-(a-2b)^3$
e. $(a+2b)^3-(2a+b)^3$

7.5

a. $(a+1)^4$
b. $(a-1)^4$
c. $(2a-1)^4$
d. $(a+2)^4$
e. $(2a-3)^4$

7.6

a. $(1-a^2)^4$
b. $(ab+1)^4$
c. $(a+2b)^4$
d. $(a^2-b^2)^4$
e. $(a-b)^4+(a+b)^4$

De formules voor $(a+b)^3$ en $(a+b)^4$

Het merkwaardige product $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vormt het uitgangspunt voor de afleiding van formules voor $(a+b)^n$ voor grotere waarden van n dan 2. We beginnen met het geval $n = 3$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \quad \text{(merkwaardig product)} \\
&= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
&\qquad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

Je ziet hoe we gebruik hebben gemaakt van het merkwaardig product voor $(a+b)^2$ en vervolgens stap voor stap de haakjes hebben uitgewerkt. In de vierde en vijfde regel hebben we gelijksoortige termen onder elkaar gezet, waardoor we ze in de zesde regel gemakkelijk konden optellen. Het resultaat is de formule

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

Gewapend met deze formule kunnen we nu op dezelfde manier het geval $n = 4$ aanpakken:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \quad \text{(formule voor } (a+b)^3\text{)} \\
&= a(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) + b(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\
&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\
&\qquad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

met als resultaat de formule

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.}$$

Opgaven over de driehoek van Pascal

7.7 Vul de driehoek van Pascal op de bladzijde hiertegenover aan met de rijen voor $n = 8$, $n = 9$ en $n = 10$.

7.8 Werk met behulp van de vorige opgave de haakjes uit in $(a+1)^8$, $(a-1)^9$ en $(a-b)^{10}$.

7.9 Als je in de driehoek van Pascal de getallen op de n-de rij bij elkaar optelt, krijg je als uitkomst 2^n. Controleer dit voor $n = 1$ tot en met $n = 10$, en geef vervolgens een verklaring door in de uitdrukking voor $(a+b)^n$ de getallen $a = 1$ en $b = 1$ te substitueren.

7.10 Als je in de driehoek van Pascal de getallen op de n-de rij, afwisselend voorzien van plus- en mintekens, bij elkaar optelt, krijg je als uitkomst 0. Controleer dit voor $n = 1$ tot en met $n = 10$, en geef vervolgens een verklaring door in de uitdrukking voor $(a+b)^n$ de getallen $a = 1$ en $b = -1$ te substitueren.

7.11 Vervang in de driehoek van Pascal elk even getal door een 0 en elk oneven getal door een 1. Teken de eerste 20 rijen van de 'binaire driehoek van Pascal' die je dan krijgt, en verklaar het patroon dat je ziet ontstaan. Een mooie variant krijg je als je alle nullen door open plaatsen vervangt en alle enen door sterretjes.

Binomiaalcoëfficiënten en de driehoek van Pascal

Tot nu toe hebben we de volgende formules afgeleid:

$$\begin{array}{rcc} (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 & = & a^4+4a^2b+6a^2b^2+4ab^3+b^4. \end{array}$$

We hebben de termen systematisch gerangschikt naar dalende machten van a en stijgende machten van b. Elke keer gaat de macht van a een stapje omlaag, en die van b een stapje omhoog. De gehele getallen die ervoor staan, heten *binomiaalcoëfficiënten*. Voor $n = 2$ zijn het de getallen 1, 2 en 1, voor $n = 3$ zijn het 1, 3, 3 en 1, en voor $n = 4$ zijn het 1, 4, 6, 4 en 1. Overigens, de coëfficiënten 1 zie je natuurlijk niet terug in de formules: we schrijven a^2 in plaats van $1a^2$, enzovoort. Maar je vindt ze wel terug in de *driehoek van Pascal*, waaruit je alle binomiaalcoëfficiënten kunt aflezen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccl}
&&&&&&&1&&&&&&&&& \leftarrow n=0 \\
&&&&&&1&&1&&&&&&&& \leftarrow n=1 \\
&&&&&1&&2&&1&&&&&&& \leftarrow n=2 \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&&& \leftarrow n=3 \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&& \leftarrow n=4 \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&& \leftarrow n=5 \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&& \leftarrow n=6 \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&& \leftarrow n=7 \\
&&&&&&&\ldots&&&&&&&&& \quad\ldots
\end{array}$$

De driehoek van Pascal

Hieruit zie je bijvoorbeeld dat

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

Bovenin hebben we ook de gevallen $n = 0$ en $n = 1$ opgenomen, in overeenstemming met $(a+b)^0 = 1$ en $(a+b)^1 = a+b$. De driehoek van Pascal is geconstrueerd volgens de volgende regel:

> *Langs de linker- en de rechterrand staan enen en verder is elk getal de som van zijn linker- en rechterbovenbuur.*

Als je de afleidingen op bladzijde 51 voor $n = 3$ en $n = 4$ hebt gevolgd, zul je begrijpen waarom deze regel algemeen opgaat. Met deze regel kun je de driehoek van Pascal zo ver voortzetten als je wilt.

Bereken de volgende binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k}$ met behulp van de formule van de bladzijde hiertegenover. Pas daarbij telkens eerst de onder die formule beschreven vereenvoudiging toe en streep daarna ook nog alle overblijvende factoren uit de noemer tegen factoren in de teller weg alvorens de berekening daadwerkelijk uit te voeren. Controleer voor $n \leq 10$ je uitkomsten met behulp van de driehoek van Pascal

7.12
a. $\binom{4}{2}$
b. $\binom{5}{0}$
c. $\binom{4}{4}$
d. $\binom{5}{3}$
e. $\binom{6}{3}$

7.13
a. $\binom{7}{1}$
b. $\binom{6}{4}$
c. $\binom{7}{5}$
d. $\binom{7}{2}$
e. $\binom{7}{7}$

7.14
a. $\binom{8}{2}$
b. $\binom{9}{3}$
c. $\binom{9}{8}$
d. $\binom{8}{4}$
e. $\binom{8}{5}$

7.15
a. $\binom{8}{3}$
b. $\binom{9}{4}$
c. $\binom{9}{7}$
d. $\binom{7}{3}$
e. $\binom{9}{6}$

7.16
a. $\binom{12}{0}$
b. $\binom{15}{14}$
c. $\binom{13}{5}$
d. $\binom{21}{2}$
e. $\binom{18}{14}$

7.17
a. $\binom{12}{7}$
b. $\binom{11}{5}$
c. $\binom{48}{2}$
d. $\binom{49}{3}$
e. $\binom{50}{48}$

7.18
a. $\binom{17}{3}$
b. $\binom{51}{50}$
c. $\binom{12}{9}$

7.19
a. $\binom{42}{3}$
b. $\binom{13}{6}$
c. $\binom{27}{5}$

7.20
a. $\binom{78}{75}$
b. $\binom{14}{5}$
c. $\binom{28}{4}$

Het berekenen van binomiaalcoëfficiënten

Met behulp van de driehoek van Pascal kun je alle binomiaalcoëfficiënten berekenen. Voor grote waarden van n is dat echter nogal bewerkelijk. Omdat die binomiaalcoëfficiënten bij veel toepassingen een rol spelen (onder andere in de kansrekening), is het goed om ook een formule te hebben om ze direct te berekenen. Alvorens die te geven, maken we enige notatieafspraken.

Op de horizontale rij bij $n = 2$ van de driehoek van Pascal vind je drie coëfficiënten: 1, 2 en 1. In het algemeen vind je op de n-de rij $n + 1$ coëfficiënten. We nummeren ze van links naar rechts van 0 tot en met n. De k-de coëfficiënt op de n-de rij noteren we als $\binom{n}{k}$, uitgesproken als 'n boven k'. Voorbeelden:

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{6}{6} = 1 \quad \text{en} \quad \binom{7}{4} = 35.$$

Een andere notatie die we vaak zullen gebruiken is die van $k!$, uitgesproken als '*k-faculteit*'. We definiëren:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ k! &= 1 \times \cdots \times k \quad \text{voor elk positief geheel getal } k. \end{aligned}$$

Voorbeelden: $1! = 1, 2! = 1 \times 2 = 2, 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ en $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$.

Met deze notatieafspraken geldt de volgende formule:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}\,.$$

Let echter op: Bij het daadwerkelijk berekenen van binomiaalcoëfficiënten moet je *nooit* die drie faculteiten afzonderlijk berekenen. In de breuk in het rechterlid kun je altijd de grootste van de twee faculteiten uit de noemer wegdelen tegen het beginstuk van $n!$. Omdat k-faculteit zeer snel groeit met k is het zelfs bij berekeningen met een rekenmachine of computer lonend om deze vereenvoudiging toe te passen. Voorbeeld:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 7}{(1 \times 2 \times 3) \times (1 \times 2 \times 3 \times 4)} = \frac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 35.$$

Verder is het goed om de volgende bijzondere gevallen uit het hoofd te kennen:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Opgaven

Schrijf met behulp van het binomium van Newton in de sigma-notatie:

7.21
a. $(a+1)^7$
b. $(a-1)^{12}$
c. $(a+10)^{12}$
d. $(2a-1)^9$
e. $(2a+b)^{10}$

7.22
a. $(a+5)^7$
b. $(1-a)^5$
c. $(ab+1)^{18}$
d. $(a+2b)^9$
e. $(a-b)^8$

Bereken de volgende sommen met behulp van het binomium van Newton; kies daartoe telkens geschikte waarden voor a en b.

7.23
a. $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}$
b. $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}(-1)^k$
c. $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}2^k$

7.24
a. $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}(-2)^k$
b. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
c. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$

De volgende opgaven zijn bedoeld als verdere oefening met de sigma-notatie. De opdracht luidt telkens: bereken de gegeven som.

7.25
a. $\sum_{k=0}^{6} k^2$
b. $\sum_{k=-4}^{4} k^3$
c. $\sum_{k=3}^{7} (2k+4)$

7.26
a. $\sum_{j=-1}^{4} (j^2-1)$
b. $\sum_{j=1}^{3} (j+\frac{1}{j})$
c. $\sum_{j=2}^{5} j^4$

Het binomium van Newton en de sigma-notatie

Op de n-de rij van de driehoek van Pascal staan de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$, en dus geldt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Deze formule staat bekend als het *binomium van Newton*.

Letterlijk betekent binomium *tweeterm*. Dat slaat op de twee termen a en b tussen de haakjes van het linkerlid. De binomiaalcoëfficiënten kunnen berekend worden met behulp van de driehoek van Pascal of met de formule van bladzijde 55.

De $n+1$ termen in het rechterlid van de bovenstaande formule hebben allemaal dezelfde vorm, namelijk een product van een binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$, een macht van a en een macht van b. Zelfs de eerste term $\binom{n}{0}a^n$ en de laatste term $\binom{n}{n}b^n$ zijn van die vorm, want daar zijn de 'ontbrekende' machten van respectievelijk b en a te schrijven als b^0 en a^0.

Alle termen zijn dus van de vorm $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, waarbij k loopt van 0 tot en met n. In zo'n situatie, waarbij een aantal gelijksoortige termen bij elkaar opgeteld moeten worden, en waarbij alleen een 'index' k van term tot term verandert, wordt vaak een notatie met behulp van de Griekse hoofdletter Σ (sigma) gebruikt. In deze notatie wordt de formule voor het binomium van Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

waarbij dus rechts van de sigma de algemene uitdrukking met een letter k (de zogenaamde *sommatie-index*) erin staat, en onder en boven de sigma de begin- en eindwaarde van de sommatie-index k. In plaats van de letter k kan natuurlijk ook elke andere letter als sommatie-index gebruikt worden.

We geven nog twee voorbeelden van de sigma-notatie voor een som:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{5} k^2 &= 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \\ \sum_{j=-2}^{2} 3^j &= 3^{-2}+3^{-1}+3^0+3^1+3^2. \end{aligned}$$

8. Rijen en limieten

8.1 Bereken de som van de volgende rijen getallen.

a. Alle positieve gehele getallen van 1 tot en met 2003.
b. Alle positieve gehele getallen van drie cijfers.
c. Alle oneven getallen tussen 1000 en 2000.
d. Alle positieve gehele getallen van hoogstens drie cijfers die op het cijfer 3 eindigen.
e. Alle positieve gehele getallen van vier cijfers die eindigen op het cijfer 2 of het cijfer 7.
f. Alle positieve gehele getallen van vier cijfers die eindigen op het cijfer 6 of het cijfer 7.

8.2 Bereken de volgende sommen:

a. $\sum_{k=1}^{20}(3k+2)$
b. $\sum_{k=10}^{70}(7k-2)$
c. $\sum_{k=3}^{30}(8k+7)$
d. $\sum_{k=0}^{14}(5k+3)$
e. $\sum_{k=-2}^{22}(100k+10)$

8.3 De deelnemers aan een hardloopwedstrijd dragen de startnummers 1 tot en met 97. Een van de lopers merkt op dat de som van alle even startnummers gelijk is aan de som van alle oneven startnummers. Daarbij telt hij zijn eigen startnummer niet mee. Wat is zijn startnummer? (Nederlandse Wiskunde Olympiade, eerste ronde, 1997.)

Rekenkundige rijen

Een *rekenkundige rij* is een rij getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ waarvoor geldt dat het verschil $a_{k+1} - a_k$ tussen twee opvolgende termen van de rij constant is. Het eenvoudigste voorbeeld is de rij $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ van alle positieve gehele getallen. Het verschil is dan telkens gelijk aan 1. Een ander voorbeeld is de rij $3, 8, 13, 18, 23, 28, \ldots$. Hierbij is het constante verschil telkens 5.

Het verhaal gaat dat de grote wiskundige Gauss als schooljongen in de rekenles aan het werk gezet werd. Hij moest alle getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar optellen. Tot verbazing van de meester gaf hij vrijwel onmiddellijk uit het hoofd het antwoord: 5050. Zijn idee was: schrijf die som in gedachten tweemaal op, eenmaal van 1 tot en met 100, en daaronder nog een keer, maar dan in de omgekeerde volgorde, dus van 100 tot en met 1. Verticaal krijg je dan telkens twee getallen die samen 101 zijn:

$$\begin{array}{rcrcccrcr} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Er zijn 100 termen in de rij, dus je krijgt $100 \times 101 = 10100$. Maar dat is twee maal de gewenste som, dus de gevraagde uitkomst is hiervan de helft, dat wil zeggen 5050. Algemeen leid je op dezelfde manier af dat $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

De truc van Gauss kun je bij alle rekenkundige rijen toepassen. Als je de som $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ van de eerste n termen van zo'n rij wilt berekenen, schrijf je die som tweemaal onder elkaar op, eenmaal gewoon en eenmaal omgekeerd. Verticaal opgeteld krijg je dan steeds hetzelfde getal, namelijk $a_1 + a_n$, en de gevraagde som is dus $\frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

Met behulp de sigma-notatie (zie bladzijde 57) kunnen we dit als volgt samenvatten:

Als $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een rekenkundige rij is, dan geldt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\, n(a_1 + a_n).}$$

Dit is de *somformule voor een rekenkundige rij.*

8.4 Bereken de som van de volgende meetkundige rijen.

a. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 256$
b. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}$
c. $2 + 6 + 18 + 54 + \cdots + 1458$
d. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{64}{729}$
e. $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10\,000\,000}$

8.5 Bereken de som van de volgende oneindige meetkundige rijen.

a. $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$
b. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$
c. $1 - \frac{7}{8} + \frac{49}{64} - \frac{343}{512} + \cdots$
d. $7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots$
e. $1 - \frac{9}{10} + \frac{81}{100} - \frac{729}{1000} + \cdots$

8.6 Schrijf de som van volgende oneindige meetkundige rijen als een breuk.

a. $0.1 - 0.01 + 0.001 - 0.0001 + \cdots$
b. $0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots$
c. $0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$
d. $0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots$
e. $0.98 - 0.0098 + 0.000098 - \cdots$

Schrijf bij de volgende opgaven de gegeven decimale ontwikkeling als een onvereenvoudigbare breuk met behulp van de somformule voor een oneindige meetkundige rij. Neem daarbij aan dat de getoonde regelmaat zich onbeperkt voortzet: alle decimale ontwikkelingen zijn vanaf het begin of vanaf een zekere decimaal periodiek.

8.7

a. 0.222222222222...
b. 0.313131313131...
c. 1.999999999999...
d. 0.123123123123...
e. 0.123333333333...

8.8

a. 0.101010101010...
b. 0.330330330330...
c. 1.211211211211...
d. 0.000111111111...
e. 3.091919191919...

8.9

a. 22.24444444444...
b. 0.700700700700...
c. 0.699699699699...
d. 8.124444444444...
e. 1.131313131313...

8.10

a. 0.111109999999...
b. 0.365656565656...
c. 3.141514151415...
d. 2.718281828182...
e. 0.090909090909...

Meetkundige rijen

Soms is het handig om de nummering van de termen van een getallenrij niet met 1 te laten beginnen, maar bijvoorbeeld met 0 omdat daardoor bepaalde formules eenvoudiger worden. We zullen dat bij de meetkundige rijen doen.

Een rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heet een *meetkundige rij* met *reden* r als voor elke n geldt dat $a_{n+1} = a_n r$. Elke term ontstaat dus uit zijn voorganger door die met r te vermenigvuldigen. Een voorbeeld is de rij $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$, waarbij elke term twee maal zo groot is als zijn voorganger. In dat geval is dus $r = 2$.

Als we de beginterm a_0 kortweg a noemen, geldt $a_1 = ar$, $a_2 = a_1 r = ar^2$, enzovoort. In het algemeen geldt voor elke n dat $a_n = ar^n$. Iedere meetkundige rij kan dus geschreven worden in de vorm

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

Als $a \neq 0$ wordt het gedrag van de rij vooral bepaald door r. Er geldt namelijk

$$\begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} r^n = \infty & \text{als } r > 1 \\ r^n = 1 & \text{als } r = 1 \\ \lim_{n\to\infty} r^n = 0 & \text{als } -1 < r < 1 \\ r^n = (-1)^n = \pm 1 & \text{als } r = -1 \\ \lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty & \text{als } r < -1. \end{array}$$

Ook voor een meetkundige rij bestaat er een eenvoudige formule voor de som $s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ van de eerste n termen. Om die te vinden, merken we op dat $rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$ zodat $s_n - rs_n = a - ar^n$ (alle tussentermen vallen tegen elkaar weg). Wanneer $r \neq 1$ kunnen we hieruit s_n oplossen: $s_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$.

Met behulp van de sigma-notatie geeft dit de *somformule voor de (eindige) meetkundige rij*:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{mits } r \neq 1.}$$

Omdat $r^n \to 0$ voor $n \to \infty$ als $-1 < r < 1$ volgt hieruit direct de *somformule voor de oneindige meetkundige rij*:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \quad \text{mits } -1 < r < 1.}$$

Bij het berekenen van limieten van uitdrukkingen die de vorm hebben van een breuk waarin teller en noemer beide naar oneindig gaan, is het vaak handig om teller en noemer eerst te delen door een 'dominante term'. Voorbeeld:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 4n + 9} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{9}{n^2}}$$

Omdat $\frac{3}{n} \to 0$, $\frac{4}{n^2} \to 0$, $\frac{4}{n} \to 0$ en $\frac{9}{n^2} \to 0$ zien we nu onmiddellijk dat de gevraagde limiet gelijk is aan $\frac{2}{3}$.
Behandel de volgende opgaven op dezelfde manier.

8.11

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+12}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+5}{3n^2-2}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n^2}{3n^4+4}$

f. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4-6n^2}{5n^4+4}$

8.12

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n+4}{n^2+4}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5}{4n^4+5n^2-3}$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3+4n+7}{8n^3-4n-7}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\frac{1}{n}}{n-\frac{2}{n}}$

f. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-5n^2}{n^4+n^2-2}$

8.13

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-1}{n^3+n^2}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n\sqrt{n+2}}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+5n+n\sqrt{n}}{3n^2-2n-1}$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n\sqrt{n^2+n}}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^4+1}{5n^4+1000n^3}$

8.14

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{3^n+1}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-2^{-n}}{2^n-1}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+1}{2^n+1}$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{3n}-1}{2^{3n}+3^{2n}}$

Limieten van rijen

Op bladzijde 61 hebben we al met limieten van rijen kennisgemaakt. We zullen nu nader omschrijven wat we in het algemeen bij een getallenrij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ onder een limiet verstaan. We geven ook telkens twee notaties, een notatie met de letters 'lim', en een 'pijlennotatie', die ook vaak gebruikt wordt. Daarnaast zal ook het symbool ∞ ('oneindig') worden gebruikt. Dat is geen reëel getal, maar een symbool dat in de omschrijving in de rechterkolom nader verklaard wordt.

'lim'-notatie:	pijlennotatie:	omschrijving:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$	$a_n \to L$ als $n \to \infty$	Bij ieder positief getal p (hoe klein ook) is er een term a_N in de rij waarvoor geldt dat alle termen a_n met $n > N$ voldoen aan $\lvert a_n - L \rvert < p$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$a_n \to \infty$ als $n \to \infty$	Bij ieder positief getal P (hoe groot ook) is er een term a_N in de rij waarvoor geldt dat alle termen a_n met $n > N$ voldoen aan $a_n > P$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$a_n \to -\infty$ als $n \to \infty$	Dit betekent eenvoudig dat $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = \infty$.

Niet alle rijen hebben overigens een limiet in een van de bovenvermelde vormen. Zo heeft de rij waarvan de n-de term gelijk is aan $(-1)^n$ (de meetkundige rij met reden (-1)) geen eindige of oneindige limiet, want de termen ervan zijn afwisselend $+1$ en -1. Evenmin heeft de meetkundige rij $(-2)^n$ een limiet: de termen ervan stijgen weliswaar in absolute waarde boven elke grens uit, maar ze zijn om en om positief en negatief, dus er blijven ook altijd termen aanwezig die niet boven zo'n grens uitkomen.

We benadrukken nogmaals dat ∞ en $-\infty$ geen reële getallen zijn, maar symbolen die we gebruiken om het limietgedrag van bepaalde rijen aan te geven. Met enige voorzichtigheid kun je er toch mee rekenen. Als bijvoorbeeld voor een rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ dan geldt voor de rij $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3}, \ldots$ dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$. De reden is duidelijk: als de getallen a_n op den duur boven iedere grens uitstijgen, zullen de getallen $\dfrac{1}{a_n}$ op den duur steeds dichter bij 0 komen. Op bladzijde 65 en in de opgaven vind je hier voorbeelden van.

Bereken de volgende limieten als ze bestaan.

8.15

a. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n$

b. $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{9}{8}\right)^n$

c. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{8}{9}}$

d. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{9}{8}}$

e. $\lim_{n\to\infty} 1.0001^n$

8.16

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 3^n}{n^3 + 3^n}$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n + 2^{-n}}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n!}{3^n - n!}$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n + 3n!}{n^n + (3n)!}$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{n! + 3n^9 - 7}{n^n + 3n^9 + 7}$

8.17

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + \sqrt[3]{n}}{3^n}$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 1000}{n^{1000}}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n}$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^n + 2^n}$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{1.002^n}{n^{1000} + 1.001^n}$

8.18

a. $\lim_{n\to\infty} n^{10}\, 0.9999^n$

b. $\lim_{n\to\infty} (n^2 + 3n - 7)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{n! + 2^n}$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1 + (n+1)!}$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (n+1)!}{3^n + n!}$

Voorbeelden van limieten van rijen:

1. De rij $1, 4, 9, 16, 25\ldots$ met als n-de term $a_n = n^2$ heeft limiet oneindig. In formule: $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$. In het algemeen geldt voor elk getal $p > 0$ dat $\lim_{n\to\infty} n^p = \infty$.
2. De rij $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}\ldots$ met als n-de term $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ heeft limiet 0. In formule: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. In het algemeen geldt voor elk getal $p > 0$ dat $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.
3. De rij $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \ldots$ met als algemene term $a_n = \sqrt[n]{2}$ heeft limiet 1. In formule $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. In het algemeen geldt voor elk getal $p > 0$ dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Snelle stijgers

We vergelijken de volgende rijen:

a. $1, 2^{100}, 3^{100}, 4^{100}, 5^{100}, \ldots$ met als algemene term $a_n = n^{100}$

b. $100, 100^2, 100^3, 100^4, 100^5, \ldots$ met als algemene term $b_n = 100^n$

c. $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$ met als algemene term $c_n = n!$

d. $1, 2^2, 3^3, 4^4, 5^5, \ldots$ met als algemene term $d_n = n^n$

Allemaal hebben ze oneindig als limiet, maar welke rij stijgt op den duur het snelst? Voor $n = 100$ zijn a_n, b_n en d_n onderling gelijk, namelijk $100^{100} = 10^{200}$, een 1 gevolgd door 200 nullen, terwijl $c_n = 100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$ duidelijk veel kleiner is (het is een getal van 'slechts' 158 cijfers). Maar voor $n = 1000$ is het beeld heel anders: $a_n = 10^{300}$, $b_n = 10^{2000}$, $c_n \approx 0.40 \times 10^{2568}$, $d_n = 10^{3000}$. Dit patroon blijft behouden: b_n stijgt op den duur veel sneller dan a_n, c_n stijgt op den duur veel sneller dan b_n, en d_n stijgt op den duur veel sneller dan c_n. In het algemeen geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0 \text{ als } a > 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Hierboven hebben we die limieten toegelicht voor $p = 100$ en $a = 100$. Overigens, zie je zelf waarom de eerste limiet vanzelfsprekend is als $p \leq 0$ is? Voor $p > 0$ is dat niet zo: de teller n^p en de noemer a^n gaan dan allebei naar oneindig. De noemer wint het echter op den duur.

IV Vergelijkingen

In veel toepassingen van de wiskunde moeten vergelijkingen of ongelijkheden worden opgelost. Je moet dan alle getallen bepalen die aan een of meer gegeven vergelijkingen of ongelijkheden voldoen. In dit deel leren we de meest elementaire oplossingstechnieken. In het bijzonder geven we methodes om eerstegraadsvergelijkingen en tweedegraadsvergelijkingen op te lossen. De beroemde *abc*-formule is daarvan een belangrijk voorbeeld. In het laatste hoofdstuk behandelen we een oplossingsmethode voor eenvoudige stelsels eerstegraadsvergelijkingen.

9. Eerstegraadsvergelijkingen en -ongelijkheden

Bepaal de oplossing x van elk van de volgende vergelijkingen

9.1

a. $x+7=10$
b. $x-12=4$
c. $x+3=-10$
d. $x-10=-7$
e. $x+8=0$

9.2

a. $-x+15=6$
b. $-x-7=10$
c. $-x+17=-10$
d. $-x-8=-9$
e. $-x-19=0$

9.3

a. $2x+7=9$
b. $3x-8=7$
c. $4x+3=11$
d. $9x-10=17$
e. $6x+6=0$

9.4

a. $-3x+15=21$
b. $-2x-7=11$
c. $-5x+17=32$
d. $-4x-8=16$
e. $-6x-18=0$

9.5

a. $2x+9=12$
b. $3x-12=9$
c. $-4x+3=-11$
d. $5x-12=17$
e. $-6x+9=0$

9.6

a. $-x-15=6$
b. $-9x-7=-10$
c. $6x+17=12$
d. $-9x-18=-6$
e. $5x-19=0$

9.7

a. $x+7=10-2x$
b. $x-12=4+5x$
c. $2x+3=-10+x$
d. $3x-10=2x-7$
e. $5x+9=2x$

9.8

a. $-x+15=6-4x$
b. $-2x-7=2x-10$
c. $3x+17=-11+x$
d. $-x-8=-9x-4$
e. $2x-19=19-2x$

9.9

a. $x-12=3-4x$
b. $-3x+5=2x-8$
c. $-x+7=-12-x$
d. $4x-1=-7x+4$
e. $2x+12=9+4x$

9.10

a. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=1+\frac{5}{2}x$
b. $-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}x-1$
c. $\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}x$
d. $-\frac{3}{7}x-\frac{3}{7}=-\frac{6}{7}-\frac{1}{7}x$
e. $\frac{2}{9}x-\frac{1}{9}=x-\frac{2}{9}$

9.11

a. $\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}=1+\frac{1}{6}x$
b. $-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}=\frac{4}{3}x-1$
c. $\frac{2}{5}x+\frac{5}{3}=-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}x$
d. $-\frac{2}{9}x-\frac{1}{4}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}x$
e. $\frac{1}{8}x-\frac{5}{6}=x-\frac{3}{4}$

9.12

a. $3(x+4)=-2(x+8)$
b. $-2(x-3)+1=-3(-x+7)+2$
c. $2-(x+4)=-2(x+1)-3$

9.13

a. $6(-x+2)-(x-3)=3(-x+1)$
b. $2x-(-x+1)=-3(-x+1)$
c. $5(-2x+3)+(2x-5)=4(x-4)$

Algemene oplossingsregels

Stel dat van een getal x gegeven is dat het voldoet aan de volgende vergelijking:

$$3x + 7 = -2x + 1$$

en dat gevraagd wordt x te bepalen.

Oplossing:

1. tel bij linker- en rechterlid $2x$ op: $5x + 7 = 1$,
2. tel bij linker- en rechterlid -7 op: $5x = -6$,
3. deel linker- en rechterlid door 5: $x = -\dfrac{6}{5}$.

Hiermee is in drie stappen het onbekende getal x gevonden. Ter controle kun je de gevonden waarde $x = -\frac{6}{5}$ in de oorspronkelijke vergelijking substitueren en constateren dat het klopt.

We hebben gebruik gemaakt van de volgende algemene regels:

V1. *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je bij linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*

V2. *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je linker- en rechterlid met hetzelfde getal vermenigvuldigt of door hetzelfde getal deelt, mits dat getal niet* 0 *is.*

De beide eerste stappen van de oplossing in het gegeven voorbeeld kun je ook zien als

het verplaatsen van een term van de ene kant van het gelijkteken naar de andere kant waarbij die term van teken wisselt (van plus naar min of omgekeerd).

Dat is de manier waarop regel V1 meestal wordt gebruikt. In stap 1 hebben we de term $-2x$ van het rechterlid naar het linkerlid overgebracht, en in stap 2 de term $+7$ van het linkerlid naar het rechterlid.

Schrijf de volgende ongelijkheden in een van de volgende gedaanten:
$x < a$, $x \le a$, $x > a$ of $x \ge a$.

9.14
a. $x + 6 < 8$
b. $x - 8 > 6$
c. $x + 9 \le 7$
d. $x - 1 \ge -3$
e. $x + 6 > 7$

9.15
a. $-2x + 4 < 8$
b. $-3x - 8 > 7$
c. $-5x + 9 \le -6$
d. $-4x + 1 \ge -3$
e. $-2x + 6 > 5$

9.16
a. $2x + 6 < x - 8$
b. $3x - 8 > 7 - 2x$
c. $x + 9 \le 7 - 3x$
d. $2x - 1 \ge x - 3$
e. $5x + 6 > 3x + 7$

9.17
a. $-2x + 6 < x + 9$
b. $x - 8 > 3x + 6$
c. $2x + 9 \le 3x + 1$
d. $-3x - 1 \ge 3 - x$
e. $5x + 6 > 7x + 2$

9.18
a. $\frac{1}{2}x + 1 < 2 - \frac{1}{3}x$
b. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{3}x$
c. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$
d. $\frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \ge \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$
e. $\frac{2}{5}x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$

9.19
a. $-\frac{3}{2}x - 1 < 2 - \frac{1}{4}x$
b. $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2} > 1 + \frac{2}{5}x$
c. $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} \le \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$
d. $\frac{2}{7}x - \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}x - \frac{3}{7}$
e. $-\frac{3}{5}x - \frac{5}{2} > -\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

Schrijf de volgende ongelijkheden in een van de volgende gedaanten:
$a < x < b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$ of $a \le x \le b$.

9.20
a. $-3 < x + 1 < 4$
b. $2 < 2x + 4 < 6$
c. $0 \le 3x + 6 < 9$
d. $-6 < 4x - 2 \le 4$
e. $1 \le 1 + 2x \le 2$

9.21
a. $-3 < -x + 1 < 2$
b. $2 < 2x - 4 < 4$
c. $0 \le -3x + 9 < 6$
d. $-6 < -4x + 2 \le 4$
e. $-1 \le 1 - 2x \le 0$

Ongelijkheden

Het manipuleren van ongelijkheden vergt iets meer zorg dan het manipuleren van vergelijkingen. Toch zijn er ook overeenkomsten. Ongelijkheden komen voor in vier gedaanten:

$$a < b, \qquad a \leq b, \qquad a > b, \qquad a \geq b.$$

Ze betekenen respectievelijk 'a is kleiner dan b','a is kleiner dan of gelijk aan b', 'a is groter dan b' en 'a is groter dan of gelijk aan b'. Uiteraard betekent $a > b$ dus hetzelfde als $b < a$, en $a \geq b$ hetzelfde als $b \leq a$. Verder geldt de volgende regel:

O1. *De geldigheid van een ongelijkheid verandert niet als je bij linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*

Deze regel heeft net als bij vergelijkingen tot gevolg dat je een term van het ene lid naar het andere lid mag overbrengen mits je daarbij het teken van die term omdraait (van plus naar min of omgekeerd).

Bij het vermenigvuldigen van linker- en rechterlid met hetzelfde getal (ongelijk aan nul) moet je oppassen:

O2. *De geldigheid van een ongelijkheid verandert niet als je linker- en rechterlid met hetzelfde positieve getal vermenigvuldigt of door hetzelfde positieve getal deelt.*

O3. *Als je linker- en rechterlid van een ongelijkheid met hetzelfde negatieve getal vermenigvuldigt of door hetzelfde negatieve getal deelt, moet je het ongelijkheidsteken omklappen.*

Soms worden gelijksoortige ongelijkheden aan elkaar gekoppeld. Zo betekent $a < b \leq c$ dat b groter dan a en kleiner dan of gelijk aan c is. Men combineert echter *nooit* ongelijksoortige ongelijkheden: combinaties van 'groter' en 'kleiner' in één keten komen nooit voor. Je kunt dus wel schrijven $a > b > c$ maar niet $a < b > c$, ook al zouden wel de afzonderlijke ongelijkheden $a < b$ en $b > c$ geldig zijn. De reden is dat je in dat geval wel weet dat a en c allebei kleiner dan b zijn, maar dat je hieruit over de onderlinge relatie van a en c niets kunt concluderen.

Bepaal alle oplossingen x van de volgende vergelijkingen.

9.22

a. $\dfrac{1}{x+1} = 5$

b. $\dfrac{x}{x-4} = 2$

c. $\dfrac{2x+1}{x} = -3$

d. $\dfrac{4x-1}{x-3} = -2$

e. $\dfrac{x+7}{-3x+8} = 1$

9.23

a. $\dfrac{2x}{3x-4} = -1$

b. $\dfrac{8x}{4x-4} = 2$

c. $\dfrac{4-4x}{x-1} = -3$

d. $\dfrac{2x+3}{4x} = 6$

e. $\dfrac{x-5}{x-4} = 1$

9.24

a. $(x+1)^2 = 1$

b. $(x-4)^2 = 9$

c. $(1-x)^2 = 25$

d. $(2x+1)^2 = 4$

e. $(-3x+1)^2 = 16$

9.25

a. $(x+2)^2 = 3$

b. $(x-1)^2 = 2$

c. $(3-x)^2 = 5$

d. $(2x+1)^2 = 6$

e. $(6-2x)^2 = 8$

9.26

a. $(x-1)^3 = 1$

b. $(x+4)^3 = -8$

c. $(1-x)^3 = 1$

d. $(2x-1)^3 = 27$

e. $(-4x-1)^3 = 64$

9.27

a. $(x-2)^4 = 1$

b. $(x+1)^4 = 16$

c. $(3-2x)^4 = 4$

d. $(2x+3)^4 = 81$

e. $(4-3x)^4 = 625$

9.28

a. $(x+1)^2 = (2x-1)^2$

b. $(3x-1)^2 = (x-1)^2$

c. $(x+1)^2 = (-2x+1)^2$

d. $(2x+5)^2 = (3-x)^2$

e. $(4x+3)^2 = x^2$

9.29

a. $(x+2)^2 = 4x^2$

b. $(2x+1)^2 = 4(x+1)^2$

c. $(-x+2)^2 = 9(x+2)^2$

d. $4(x+1)^2 = 25(x-1)^2$

e. $9(2x+1)^2 = 4(1-2x)^2$

Het reduceren van een vergelijking tot een eerstegraadsvergelijking

Een vergelijking van de vorm

$$ax + b = 0$$

waarin x een onbekend getal is en a en b gegeven (bekende) getallen zijn met $a \neq 0$, heet een *eerstegraadsvergelijking* in x. De vergelijkingen van bladzijde 50 kunnen allemaal in deze vorm worden geschreven. Zo'n vergelijking kunnen we met behulp van de regels V1 en V2 van bladzijde 69 oplossen. De oplossing is dan

$$x = -\frac{b}{a}.$$

In bepaalde gevallen kun je gecompliceerdere vergelijkingen tot eerstegraadsvergelijkingen terugbrengen.

Voorbeeld 1:

$$\frac{3x+2}{4x-5} = 2.$$

Door linker- en rechterlid met $4x - 5$ te vermenigvuldigen, ontstaat de vergelijking

$$3x + 2 = 2(4x - 5)$$

die met de methode van bladzijde 69 kan worden opgelost. Het resultaat is $x = \frac{12}{5}$, zoals je zelf kunt nagaan.

We maakten bij de eerste stap dus gebruik van regel V2. Dit is slechts toegestaan als het getal $4x - 5$ waarmee we linker- en rechterlid vermenigvuldigd hebben, ongelijk aan 0 is. Omdat we x in dit stadium van de oplossingsmethode nog niet kenden, wisten we toen ook nog niet of $4x - 5 \neq 0$ is. Dat konden we pas controleren toen we de nieuwe vergelijking naar x hadden opgelost. Zo'n *controle achteraf* is niet overbodig, zoals je kunt zien in sommige van de opgaven op de tegenoverliggende bladzijde.

Voorbeeld 2:

$$(3x - 1)^2 = 4.$$

Als x voldoet, moet het kwadraat van $3x - 1$ gelijk zijn aan 4. Dat wil zeggen dat $3x - 1$ gelijk is aan $+2$ of -2. Er zijn dus twee mogelijkheden:

$$3x - 1 = 2 \quad \text{en} \quad 3x - 1 = -2$$

met als oplossingen $x = 1$ en $x = -\frac{1}{3}$ (ga dit zelf na).

10. Tweedegraadsvergelijkingen

Bepaal alle oplossingen x van de volgende vergelijkingen.

10.1

a. $x^2 = 9$
b. $4x^2 = 16$
c. $3x^2 + 1 = 13$
d. $-2x^2 + 21 = 3$
e. $2x^2 - 48 = 40$

10.2

a. $3x^2 - 2 = x^2 + 2$
b. $x^2 - 15 = 2x^2 - 2$
c. $12 - x^2 = x^2 - 4$
d. $3(2 - x^2) = x^2 + 6$
e. $-2(1 - x^2) = x^2$

10.3

a. $\frac{1}{2}x^2 = 2$
b. $\frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{2}$
c. $\frac{3}{2}x^2 = \frac{2}{3}$
d. $\frac{4}{5}x^2 = \frac{5}{4}$
e. $2x^2 = \frac{9}{4}$

10.4

a. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$
b. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
c. $-\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{7} = \frac{4}{3}$
d. $\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$
e. $\frac{1}{3}(x^2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

10.5

a. $x(x + 3) = 0$
b. $(x + 1)(x - 5) = 0$
c. $(x - 1)(x + 1) = 0$
d. $(x + 7)(x - 2) = 0$
e. $(x - 3)(x + 9) = 0$

10.6

a. $x(2x - 1) = 0$
b. $(2x + 1)(x - 3) = 0$
c. $(3x + 2)(2x - 3) = 0$
d. $(5x + 3)(3x - 5) = 0$
e. $(2 - 3x)(3x - 2) = 0$

10.7

a. $3(x - 1)(x + 3) = 0$
b. $5(x - 1)(x + 5) = 0$
c. $-2(2x + 1)(3x - 4) = 0$
d. $4(3x + 2)(6x + 3) = 0$
e. $-5(3x - 2)(3x + 2) = 0$

10.8

a. $(\frac{1}{2}x + 3)(x - \frac{2}{3}) = 0$
b. $(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5})(\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}) = 0$
c. $\frac{1}{2}(\frac{3}{4}x - \frac{4}{3})(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}) = 0$

Tweedegraadsvergelijkingen

Een vergelijking van de vorm

$$ax^2 + bx + c = 0$$

waarin x een onbekende is en a, b en c gegeven (bekende) getallen zijn met $a \neq 0$, heet een *tweedegraadsvergelijking* in x. Vaak wordt ook de term *vierkantsvergelijking* gebruikt.

Zo'n vergelijking heeft 0, 1 of 2 oplossingen, dat wil zeggen er zijn 0, 1 of 2 getallen x die aan de vergelijking voldoen. Die oplossingen worden ook wel *wortels* van de vergelijking genoemd, hoewel er in de schrijfwijze van die getallen helemaal geen wortels in de zin van hoofdstuk 3 hoeven voor te komen. We geven van elk van de drie gevallen een voorbeeld.

1. De vergelijking $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossingen, want het linkerlid is voor elke keuze van x groter dan of gelijk aan 1 (een kwadraat is altijd groter dan of gelijk aan 0).

2. De vergelijking $x^2 + 2x + 1 = 0$ heeft één oplossing, want het linkerlid kan geschreven worden als $(x + 1)^2$, en dat is alleen maar gelijk aan 0 als $x + 1 = 0$ is, dat wil zeggen als $x = -1$.

3. De vergelijking $x^2 - 1 = 0$ heeft twee oplossingen, namelijk $x = 1$ en $x = -1$.

In sommige gevallen vereist het oplossen van een tweedegraadsvergelijking geen speciale techniek. Als voorbeeld nemen we

$$x^2 - 3x = 0.$$

Door deze vergelijking te schrijven als

$$x(x - 3) = 0$$

en op te merken dat het product van twee getallen die beide ongelijk aan 0 zijn, ook altijd ongelijk aan 0 is, zien we dat $x = 0$ of $x - 3 = 0$ moet zijn. De oplossingen zijn dus $x = 0$ en $x = 3$.

Opgaven

Los de volgende vergelijkingen op via kwadraatafsplitsen.

10.9

a. $x^2 + 4x + 1 = 0$
b. $x^2 + 6x - 2 = 0$
c. $x^2 + 8x + 3 = 0$
d. $x^2 - 2x - 1 = 0$
e. $x^2 + 10x + 5 = 0$

10.10

a. $x^2 - 12x + 6 = 0$
b. $x^2 - 13x - 7 = 0$
c. $x^2 + x - 42 = 0$
d. $x^2 - 12x + 27 = 0$
e. $x^2 + 6x - 12 = 0$

10.11

a. $x^2 + 7x - 1 = 0$
b. $x^2 + 3x - 4 = 0$
c. $x^2 + 4x + 4 = 0$
d. $x^2 - 4x - 4 = 0$
e. $x^2 - 11x + 7 = 0$

10.12

a. $x^2 + 20x + 60 = 0$
b. $x^2 - 18x - 80 = 0$
c. $x^2 + 13x - 42 = 0$
d. $x^2 - 15x + 56 = 0$
e. $x^2 + 60x + 800 = 0$

10.13

a. $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$
b. $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{9} = 0$
c. $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = 0$
d. $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{8} = 0$
e. $x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = 0$

10.14

a. $x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} = 0$
b. $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$
c. $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$
d. $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} = 0$
e. $x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} = 0$

Kwadraatafsplitsen

Om de vergelijking

$$x^2 - 6x + 3 = 0.$$

op te lossen, schrijven we die vergelijking als

$$x^2 - 6x + 9 = 6$$

waardoor het linkerlid een volledig kwadraat wordt, namelijk het kwadraat van $x - 3$. Het oplossen van de vergelijking die dan ontstaat, is eenvoudig:

$$(x - 3)^2 = 6$$

zodat

$$x - 3 = \sqrt{6} \quad \text{of} \quad x - 3 = -\sqrt{6}$$

en de beide oplossingen zijn dus

$$x = 3 + \sqrt{6} \quad \text{en} \quad x = 3 - \sqrt{6}.$$

Deze methode is algemeen bruikbaar als de coëfficiënt van x^2 gelijk aan 1 is. Neem dan *de helft* van de coëfficiënt van x om in het linkerlid een volledig kwadraat te maken, en in het rechterlid een constante, dat wil zeggen een getal dat niet van x afhangt. Is die constante positief of nul, dan kun je worteltrekken, en daarmee de vergelijking oplossen. Is de constante negatief, dan zijn er geen oplossingen, want het linkerlid is een kwadraat, en dus niet-negatief.

Los de volgende vergelijkingen op met behulp van de *abc*-formule.

10.15

a. $x^2 + 5x + 1 = 0$
b. $x^2 - 3x + 2 = 0$
c. $x^2 + 7x + 3 = 0$
d. $x^2 - x + 1 = 0$
e. $x^2 + 11x + 11 = 0$

10.16

a. $x^2 + 3x + 1 = 0$
b. $x^2 - 4x + 3 = 0$
c. $x^2 + 9x - 2 = 0$
d. $x^2 - 12x + 3 = 0$
e. $x^2 - 5x + 1 = 0$

10.17

a. $2x^2 + 4x + 3 = 0$
b. $2x^2 - 12x + 9 = 0$
c. $3x^2 + 12x - 8 = 0$
d. $4x^2 + 12x + 1 = 0$
e. $6x^2 - 12x - 1 = 0$

10.18

a. $2x^2 + x - 1 = 0$
b. $3x^2 + 2x + 1 = 0$
c. $2x^2 + 8x - 2 = 0$
d. $6x^2 + 18x + 7 = 0$
e. $4x^2 - 8x^2 + 1 = 0$

10.19

a. $-x^2 + 2x + 1 = 0$
b. $-2x^2 + 8x - 3 = 0$
c. $-3x^2 + 9x - 1 = 0$
d. $-4x^2 - 12x + 9 = 0$
e. $-x^2 + x + 1 = 0$

10.20

a. $3x^2 - 4x + 3 = 0$
b. $-2x^2 + 3x + 2 = 0$
c. $-4x^2 + 6x + 5 = 0$
d. $6x^2 + 18x - 1 = 0$
e. $-x^2 - x - 1 = 0$

10.21

a. $\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$
b. $\frac{2}{3}x^2 + 2x - 3 = 0$
c. $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$
d. $\frac{4}{5}x^2 + 3x - 2 = 0$
e. $\frac{5}{2}x^2 + 5x - 2 = 0$

10.22

a. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0$
b. $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 0$
c. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0$
d. $\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{5}{4} = 0$
e. $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$

De *abc*-formule

De methode van het kwadraatafsplitsen kunnen we ook in het algemene geval toepassen. Om breuken in de afleiding zo veel mogelijk te vermijden, zullen we het recept een klein beetje aanpassen.

Stel dat gegeven is de tweedegraadsvergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

met $a \neq 0$. Vermenigvuldig linker- en rechterlid met $4a$

$$4a^2x^2 + 4ab\,x + 4ac = 0$$

en schrijf dit als

$$4a^2x^2 + 4ab\,x + b^2 = b^2 - 4ac$$

zodat het linkerlid een volledig kwadraat wordt, namelijk het kwadraat van $2ax + b$. De vergelijking wordt dan

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Het rechterlid $b^2 - 4ac$ wordt de *discriminant* genoemd. Als de discriminant negatief is, heeft de vergelijking geen oplossingen, want het linkerlid is niet-negatief omdat het een kwadraat is.

Is de discriminant positief of nul, dan geeft worteltrekken

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{of} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

waaruit de oplossingen volgen:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Als de discriminant nul is, vallen de beide oplossingen samen. Men schrijft de oplossingen vaak als één formule:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.}$$

Dit is de beroemde *abc-formule*, ook wel de *wortelformule* genoemd.

11. Stelsels eerstegraadsvergelijkingen

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

11.1

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ -x + 6y = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -3x + 4y = -2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

11.2

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ 4x - 7y = 13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ -5x + 2y = 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 7x + 5y = 1 \\ 3x - 4y = 25 \end{cases}$

11.3

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - 7y = 5 \\ x - 4y = -1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x - 7y = 8 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

11.4

a. $\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 9y = 5 \\ -x - 4y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 6x + 5y = 1 \\ 7x + 6y = 2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 8x - 5y = 2 \end{cases}$

Twee vergelijkingen met twee onbekenden

Stel dat van twee onbekende getallen x en y gegeven is dat ze voldoen aan elk van de volgende twee eerstegraadsvergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 4y = 2. \end{cases}$$

Men noemt dit een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. De getallen x en y kunnen we op de volgende manier uit dit stelsel oplossen.

Vermenigvuldig in de eerste vergelijking linker- en rechterlid met 3, en in de tweede vergelijking linker- en rechterlid met 2, zodat de coëfficiënten van x in beide vergelijkingen gelijk worden:

$$\begin{cases} 6x + 15y = 27 \\ 6x - 8y = 4. \end{cases}$$

Trek vervolgens de tweede vergelijking van de eerste af. Je houdt dan een vergelijking over waarin alleen nog maar de onbekende y voorkomt:

$$23y = 23$$

met als oplossing $y = 1$. Substitutie van deze waarde in een van de beide oorspronkelijke vergelijkingen geeft een vergelijking waaruit x kan worden opgelost. We kiezen de eerste vergelijking:

$$2x + 5 \times 1 = 9$$

oftewel $2x = 4$ dus $x = 2$.

Hiermee zijn de getallen x en y gevonden. Je kunt ter controle nagaan dat de combinatie $x = 2$ en $y = 1$ inderdaad aan de beide oorspronkelijke vergelijkingen voldoet.

Deze methode is algemeen bruikbaar: vermenigvuldig de vergelijkingen met factoren waardoor de coëfficiënten van x (of die van y) gelijk worden. Aftrekken geeft dan een vergelijking waarin alleen nog y (respectievelijk x) voorkomt. Daaruit kan y (respectievelijk x) worden opgelost, en substitutie van de gevonden waarde in een van de beide oorspronkelijke vergelijkingen geeft dan een vergelijking waarin alleen nog maar de andere onbekende voorkomt. Die kan vervolgens daaruit worden opgelost.

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

11.5

a.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & -8 \\ -3x & + & 2y & + & 2z & = & 7 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 4y & + & z & = & -2 \\ -2x & + & 3y & - & 2z & = & -1 \\ -4x & + & y & + & z & = & -2 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 8 \\ -3x & + & y & & & = & -7 \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ -2x & - & y & - & 2z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & -9 \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & -9 \\ x & - & y & - & 2z & = & -6 \\ -4x & & & + & 3z & = & 7 \end{array}$$

11.6

a.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 5y & + & z & = & -2 \\ x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -3x & + & 5y & + & 7z & = & -4 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -3 \\ -3x & + & 2y & - & 6z & = & -5 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 6y & + & z & = & -8 \\ & - & y & - & 2z & = & -1 \\ -3x & + & 2y & + & 4z & = & 8 \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ -3x & - & y & - & 3z & = & 1 \\ -2x & - & 3y & + & 2z & = & -8 \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 8y & + & 3z & = & -9 \\ & - & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 5y & & & = & -3 \end{array}$$

Bij het oplossen van de volgende stelsels vergelijkingen gebeuren er vreemde dingen. Onderzoek wat er gebeurt, en probeer het te verklaren. Wat zou je in deze gevallen verstaan onder het 'oplossen' van het stelsel vergelijkingen?

11.7

a.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3z & = & 4 \\ -4x & + & 6y & + & 4z & = & -8 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & 3z & = & 4 \\ -4x & + & 6y & + & 4z & = & -9 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ -2x & + & y & & & = & 5 \\ & & 5y & - & 2z & = & -3 \end{array}$$

11.8

a.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & -2 \\ -2x & + & y & & & = & 4 \\ & & 5y & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & & & - & 4z & = & 1 \\ -x & + & 5y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & - & 2z & = & 4 \\ 2x & & & - & 4z & = & -2 \\ -x & + & 5y & + & 2z & = & 6 \end{array}$$

Drie vergelijkingen met drie onbekenden

Wanneer we een stelsel van drie eerstegraadsvergelijkingen hebben voor de drie onbekenden x, y en z, kunnen we als volgt te werk gaan. Neem bijvoorbeeld het stelsel

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y - 3z = 4 \\ -4x + 5y + 9z = -9. \end{cases}$$

Uit de eerste twee vergelijkingen kunnen we x elimineren door de eerste van de tweede af te trekken:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & + & z & = & 0 & (\times -1) \\ x & - & y & - & 3z & = & 4 & (\times 1) \\ \hline & & y & - & 4z & = & 4 & \end{array}$$

Uit de eerste en de derde vergelijking kunnen we x elimineren door vier maal de eerste bij de derde op te tellen:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & + & z & = & 0 & (\times 4) \\ -4x & + & 5y & + & 9z & = & -9 & (\times 1) \\ \hline & & -3y & + & 13z & = & -9 & \end{array}$$

Zo krijg je een stelsel van twee vergelijkingen in de twee onbekenden y en z

$$\begin{cases} y - 4z = 4 \\ -3y + 13z = -9 \end{cases}$$

dat je op de bekende manier op kunt lossen. Hier is het handig om drie maal de eerste vergelijking bij de tweede op te tellen, met als resultaat $z = 3$. Substitutie van deze waarde in de eerste vergelijking geeft

$$y - 4 \times 3 = 4$$

dus $y = 16$. Vul je $y = 16$ en $z = 3$ in de eerste vergelijking van het oorspronkelijke stelsel in, dan krijg je

$$x - 2 \times 16 + 3 = 0$$

met als oplossing $x = 29$. Hiermee is het stelsel opgelost. De gezochte waarden zijn $x = 29$, $y = 16$, $z = 3$.

De methode is algemeen bruikbaar voor 3×3-stelsels: elimineer één van de onbekenden uit twee paren vergelijkingen, los het resulterende stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op, en bereken vervolgens via substitutie ook de waarde van de geëlimineerde onbekende.

V Meetkunde

De oude Grieken legden meer dan tweeduizend jaar geleden met hun axiomatische methode de basis voor de ontwikkeling van de klassieke meetkunde. In de zeventiende eeuw kwamen Fermat en Descartes echter met een totaal nieuw concept: meetkunde met behulp van coördinaten. Dat is inmiddels de grondslag geworden van vrijwel alle toepassingen van de meetkunde, ook in bijvoorbeeld de computergrafiek. In dit deel behandelen we de belangrijkste eigenschappen van lijnen en cirkels in het vlak met behulp van coördinaten. In het laatste hoofdstuk zien we hoe dezelfde methoden ook toepasbaar zijn op vlakken en bollen in de ruimte.

12. Lijnen in het vlak

In de volgende opgaven wordt aangenomen dat in het vlak een rechthoekig coördinatenstelsel Oxy gekozen is.
Teken de volgende lijnen in het vlak. Bepaal ook telkens de snijpunten van zo'n lijn met de x-as en de y-as (indien aanwezig).

12.1
a. $x + y = 1$
b. $x - y = 0$
c. $2x + y = 2$
d. $-x + 2y = -2$
e. $x + 3y = 4$

12.2
a. $x - 4y = -3$
b. $2x + 8y = -10$
c. $-3x + y = 0$
d. $7x - 2y = -14$
e. $-5x - 2y = 4$

12.3
a. $x = 0$
b. $x = -3$
c. $x = 2y$
d. $y = -1$
e. $3x = 2y + 1$

Teken de volgende halfvlakken.

12.4
a. $x \leq 0$
b. $x \geq -3$
c. $x \geq y$
d. $y \leq -2$
e. $3x \leq y$

12.5
a. $x + y \leq 2$
b. $2x - y \geq 0$
c. $2x + y \leq 2$
d. $-2x + 3y \leq -2$
e. $3x + 3y \geq 4$

12.6
a. $5x - 4y \geq 3$
b. $-2x + 7y \leq -9$
c. $-3x \geq y + 2$
d. $7x + 2 \leq y$
e. $-5 \leq x + 2y$

12.7 Teken de volgende lijnen in één figuur.

a. $x + y = -1,\ x + y = 0,\ x + y = 1$ en $x + y = 2$
b. $x - y = -1,\ x - y = 0,\ x - y = 1$ en $x - y = 2$
c. $x + 2y = -1,\ x + 2y = 0,\ x + 2y = 1$ en $x + 2y = 2$
d. $2x + 2y = -1,\ 2x + 2y = 0,\ 2x + 2y = 1$ en $2x + 2y = 2$
e. $x = -2y,\ x = -y,\ x = 0,\ x = y$ en $x = 2y$

In de volgende opgaven zijn telkens twee punten gegeven. Geef een vergelijking van de lijn door die punten.

12.8
a. $(3, 0)$ en $(0, 3)$
b. $(3, 0)$ en $(2, 0)$
c. $(-1, 0)$ en $(0, 5)$
d. $(-2, 0)$ en $(0, 5)$
e. $(-2, -1)$ en $(-2, -2)$

12.9
a. $(3, 0)$ en $(0, -2)$
b. $(3, 1)$ en $(3, -1)$
c. $(2, 0)$ en $(0, 5)$
d. $(-2, 2)$ en $(2, -2)$
e. $(1, -1)$ en $(2, 0)$

De vergelijking van een lijn in het vlak

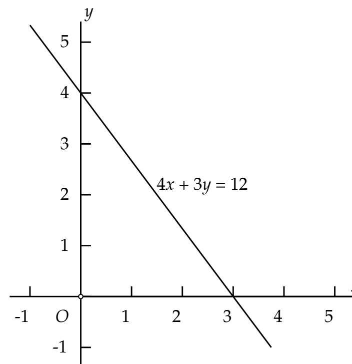
De vergelijking

$$4x + 3y = 12$$

bevat twee onbekenden x en y. Een oplossing van deze vergelijking is dus een *paar* (x, y) dat aan de vergelijking voldoet. Zo is bijvoorbeeld $(1, \frac{8}{3})$ een oplossing, want als je $x = 1$, $y = \frac{8}{3}$ invult, is aan de vergelijking voldaan. Maar er zijn nog meer oplossingen, bijvoorbeeld $(3, 0)$, $(0, 4)$ of $(-1, \frac{16}{3})$.

In feite kun je één van de beide onbekenden x en y vrij kiezen, waarna de ander uit de vergelijking kan worden opgelost. Wanneer je in het vlak een rechthoekig coördinatenstelsel Oxy gekozen hebt, zijn de oplossingen van de vergelijking de punten van een rechte lijn, in dit geval de lijn door $(0, 4)$ en $(3, 0)$. De punten (x, y) van die lijn zijn precies de punten waarvan de coordinaten voldoen aan de vergelijking $4x + 3y = 12$.

De lijn met vergelijking $4x + 3y = 12$ verdeelt het vlak in twee halfvlakken. Voor de punten die in het ene halfvlak liggen, geldt $4x + 3y \geq 12$, voor die in het andere halfvlak geldt $4x + 3y \leq 12$. Voor welk halfvlak welke ongelijkheid geldt, bepaal je door een punt in te vullen: de oorsprong O voldoet aan $4 \times 0 + 3 \times 0 \leq 12$, dus het halfvlak waar de oorsprong in zit, wordt gegeven door $4x + 3y \leq 12$.



In het algemeen stelt elke vergelijking van de vorm $ax + by = c$ een rechte lijn voor. De enige voorwaarde is dat a en b niet allebei nul mogen zijn. Zo'n vergelijking is niet uniek bepaald: vermenigvuldig je linker- en rechterlid met hetzelfde getal (dat niet nul is), dan krijg je een andere vergelijking voor dezelfde lijn. Zo stelt $8x + 6y = 24$ dezelfde lijn voor als $4x + 3y = 12$.

Bepaal in de volgende gevallen een vergelijking van de lijn door de twee gegeven punten.

12.10
a. $(2,1)$ en $(1,2)$
b. $(2,2)$ en $(-2,0)$
c. $(-1,1)$ en $(1,5)$
d. $(-3,-1)$ en $(-1,5)$
e. $(4,-1)$ en $(-1,-2)$

12.11
a. $(1,-2)$ en $(3,5)$
b. $(7,1)$ en $(5,-1)$
c. $(-1,1)$ en $(4,5)$
d. $(3,-2)$ en $(2,-6)$
e. $(4,-1)$ en $(-1,-3)$

12.12
a. $(4,-1)$ en $(0,0)$
b. $(0,0)$ en $(2,3)$
c. $(-1,0)$ en $(1,-5)$
d. $(-3,4)$ en $(4,-3)$
e. $(-2,0)$ en $(-1,-2)$

12.13
a. $(10,0)$ en $(0,10)$
b. $(3,-1)$ en $(-3,-1)$
c. $(5,-2)$ en $(1,3)$
d. $(-2,-8)$ en $(8,-2)$
e. $(1,-1)$ en $(2,7)$

De vergelijking $(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$ is de vergelijking van de lijn door (a_1, a_2) en (b_1, b_2). Elk punt (x, y) dat aan die vergelijking voldoet, ligt op die lijn, en omgekeerd voldoet elk punt op die lijn ook aan die vergelijking. Een punt (c_1, c_2) ligt dus op de lijn door (a_1, a_2) en (b_1, b_2) als $(a_1 - b_1)(c_2 - b_2) = (a_2 - b_2)(c_1 - b_1)$. Gebruik dit om te onderzoeken of de volgende drietallen punten op één lijn liggen.

12.14
a. $(2,1)$, $(3,0)$ en $(1,2)$
b. $(2,2)$, $(0,1)$ en $(-2,0)$
c. $(-1,1)$, $(3,9)$ en $(1,5)$
d. $(-3,-1)$, $(0,2)$ en $(-1,1)$
e. $(4,-1)$, $(1,1)$ en $(-1,2)$

12.15
a. $(1,-2)$, $(0,-5)$ en $(3,4)$
b. $(7,1)$, $(1,-5)$ en $(5,-1)$
c. $(-1,1)$, $(1,3)$ en $(4,5)$
d. $(3,2)$, $(-1,-10)$ en $(2,-1)$
e. $(4,1)$, $(0,-2)$ en $(-1,-3)$

De vergelijking van de lijn door twee punten

Omdat de vergelijking

$$ax + by = c$$

bij gegeven a, b en c een *rechte lijn* in het Oxy-vlak voorstelt (mits a en b niet beide nul zijn), noemt men zo'n vergelijking een *lineaire vergelijking* in x en y. Omgekeerd hoort bij elke rechte lijn ook een lineaire vergelijking in x en y waarin de coëfficiënten van x en y niet allebei nul zijn.

In de opgaven bij de vorige paragraaf hebben we al in een aantal eenvoudige gevallen een vergelijking bepaald voor de lijn door twee gegeven punten. Voor het algemene geval van een lijn door twee verschillende punten $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$ bestaat een overzichtelijke formule:

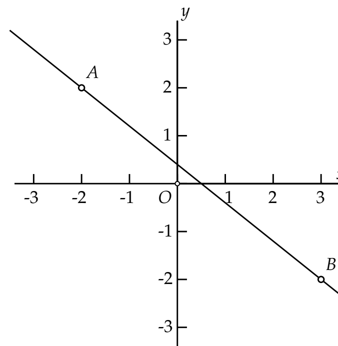
> *Een vergelijking van de lijn door de punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2) is*
> $$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1).$$

Voorbeeld: een vergelijking van de lijn door $A = (-2, 2)$ en $B = (3, -2)$ is

$$(-2 - 3)(y + 2) = (2 - (-2))(x - 3)$$

oftewel, na haakjes uitwerken en sorteren:

$$4x + 5y = 2.$$



Inderdaad, als je $(-2, 2)$ of $(3, -2)$ invult klopt het, en aangezien een rechte lijn door twee punten bepaald is, moet dit wel de gezochte vergelijking zijn.

Om de algemene formule te verifiëren, is het ook voldoende om te controleren dat (a_1, a_2) en (b_1, b_2) beide voldoen aan de vergelijking

$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1).$$

Invullen van $x = a_1$ en $y = a_2$ geeft $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = (a_2 - b_2)(a_1 - b_1)$ en dat klopt, en invullen van $x = b_1$ en $y = b_2$ maakt linker- en rechterlid beide nul, dus dan klopt de vergelijking ook.

Bepaal in de volgende gevallen het snijpunt van de twee gegeven lijnen, voor zover ze niet evenwijdig zijn of samenvallen.

12.16

a. $x + y = 2$
$x - y = 1$

b. $x + y = 3$
$2x + y = 6$

c. $-5x + 2y = 4$
$x - 3y = 0$

d. $x + y = 3$
$-x - y = 7$

e. $8x + 3y = 7$
$7y = -4$

12.17

a. $x + 2y = -8$
$3x - 8y = 5$

b. $-2x + 7y = 3$
$-5x - 2y = 6$

c. $5x = 14$
$3x - 2y = 7$

d. $4x = -17$
$9y = 11$

e. $8x - 5y = 1$
$-2x - 11y = 0$

12.18

a. $x + y = 3$
$x - y = 5$

b. $2x + y = 3$
$-x - 2y = 6$

c. $-3x + 2y = 4$
$x - 2y = 2$

d. $4x - 7y = -2$
$5x + 4y = 11$

e. $x + 3y = 6$
$3x + 9y = -2$

12.19

a. $-x + 2y = 9$
$13x - 8y = 15$

b. $12x - 7y = 13$
$-5x - y = 8$

c. $5x + 8y = 14$
$9x - 12y = 5$

d. $4x - 6y = -12$
$-6x + 9y = 18$

e. $-8x + 3y = 5$
$3x - 7y = -12$

12.20 Bepaal een vergelijking van

a. de lijn door $(0, 0)$ die evenwijdig is aan $x + y = 4$
b. de lijn door $(1, 0)$ die evenwijdig is aan $2x - y = -2$
c. de lijn door $(0, 3)$ die evenwijdig is aan $-x + 4y = 5$
d. de lijn door $(1, -1)$ die evenwijdig is aan $-5x + 2y = -7$
e. de lijn door $(-2, 5)$ die evenwijdig is aan $8x + 7y = 14$

Het snijpunt van twee lijnen

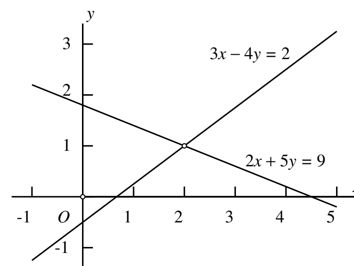
Twee verschillende lijnen in het vlak snijden elkaar in één punt of ze zijn evenwijdig. Als ze elkaar snijden, hoe bepaal je dan het snijpunt? We geven een voorbeeld. Stel dat de lijnen gegeven worden door de vergelijkingen

$$2x + 5y = 9 \qquad \text{en} \qquad 3x - 4y = 2.$$

Hun snijpunt (x, y) voldoet dan aan beide vergelijkingen, met andere woorden, het is een oplossing van het *stelsel vergelijkingen*

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 4y = 2. \end{cases}$$

In Hoofdstuk 11 hebben we laten zien hoe je zo'n stelsel oplost. Het snijpunt blijkt het punt $(x, y) = (2, 1)$ te zijn.



Niet altijd hebben twee lijnen precies één snijpunt. Ze kunnen evenwijdig zijn, dan is er geen snijpunt, en ze kunnen ook samenvallen, dan zou je kunnen zeggen dat er oneindig veel snijpunten zijn. Hoe zie je dat aan de vergelijkingen?

Bij samenvallende lijnen zijn de twee vergelijkingen gelijk of een veelvoud van elkaar; dat zie je onmiddellijk. Bij evenwijdige lijnen zijn, in de standaardvorm $ax + by = c$, alleen de linkerleden gelijk of een veelvoud van elkaar. Neem bijvoorbeeld de lijnen $-6x + 8y = 1$ en $3x - 4y = 2$. In het stelsel

$$\begin{cases} -6x + 8y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

krijg je, als je de tweede vergelijking met een factor -2 vermenigvuldigt

$$\begin{cases} -6x + 8y = 1 \\ -6x + 8y = -4. \end{cases}$$

Dat is een *strijdig stelsel*, dat wil zeggen dat er geen oplossingen (x, y) zijn. De uitdrukking $-6x + 8y$ kan immers niet tegelijkertijd 1 en -4 zijn. En lijnen die geen snijpunt hebben, zijn evenwijdig.

13. Afstanden en hoeken

Bereken de afstand van de volgende paren punten

13.1

a. $(0,0)$ en $(0,-3)$
b. $(2,0)$ en $(-2,0)$
c. $(0,0)$ en $(1,-5)$
d. $(-1,1)$ en $(-3,3)$
e. $(2,2)$ en $(-4,0)$

13.2

a. $(1,2)$ en $(1,-2)$
b. $(3,-1)$ en $(4,-2)$
c. $(-1,-3)$ en $(3,1)$
d. $(-1,0)$ en $(0,-2)$
e. $(1,1)$ en $(-2,2)$

13.3

a. $(3,0)$ en $(0,3)$
b. $(3,0)$ en $(2,1)$
c. $(-1,0)$ en $(1,5)$
d. $(-2,1)$ en $(3,5)$
e. $(-2,-1)$ en $(-4,-2)$

13.4

a. $(3,2)$ en $(1,-2)$
b. $(3,1)$ en $(4,-1)$
c. $(-2,3)$ en $(3,5)$
d. $(-1,2)$ en $(2,-2)$
e. $(1,-1)$ en $(2,2)$

Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van elk van de volgende paren punten. Teken alles ook op ruitjespapier.

13.5

a. $(3,0)$ en $(0,3)$
b. $(0,0)$ en $(2,1)$
c. $(-2,0)$ en $(0,0)$
d. $(-2,1)$ en $(2,5)$
e. $(-2,-1)$ en $(-4,-2)$

13.6

a. $(3,2)$ en $(1,-2)$
b. $(3,1)$ en $(4,-1)$
c. $(-2,3)$ en $(3,5)$
d. $(-1,2)$ en $(2,-2)$
e. $(1,-1)$ en $(2,2)$

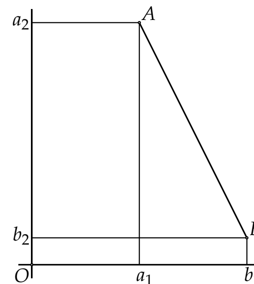
13.7 Neem in de volgende opgaven eerst $a = 2$, $b = 3$, en teken je resultaten op ruitjespapier. Los daarna het algemene geval op.

a. Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van (a,b) en $(a,-b)$, alsmede een vergelijking van de lijn door (a,b) en $(a,-b)$.
b. Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van (a,b) en (b,a), alsmede een vergelijking van de lijn door (a,b) en (b,a).
c. Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van (a,b) en $(-a,-b)$, alsmede een vergelijking van de lijn door (a,b) en $(-a,-b)$.
d. Bepaal een vergelijking van de lijn door $(1,1)$ die loodrecht staat op de verbindingslijn van $(0,0)$ en (a,b).
e. Bepaal een vergelijking van de lijn door (a,b) die loodrecht staat op de verbindingslijn van $(0,0)$ en (a,b).

Afstand en middelloodlijn

Een rechthoekig coördinatenstelsel Oxy wordt *orthonormaal* genoemd wanneer de schaalverdelingen op de beide assen gelijk zijn. In meetkundige toepassingen zullen we bijna altijd met zo'n orthonormaal coördinatenstelsel werken.

In een orthonormaal coördinatenstelsel Oxy wordt volgens de stelling van Pythagoras de afstand $d(A, B)$ van de punten $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$ gegeven door

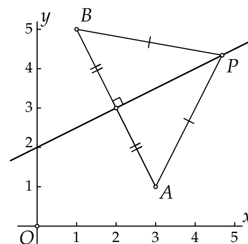


$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.}$$

Neem bijvoorbeeld $A = (4, 9)$ en $B = (8, 1)$, dan is $d(A, B) = \sqrt{(4-8)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

De punten P waarvoor geldt dat $d(P, A) = d(P, B)$ vormen de *middelloodlijn* van A en B. Het is de lijn die het lijnstuk AB loodrecht middendoor deelt.

Hiernaast is als voorbeeld de middelloodlijn van $A = (3, 1)$ en $B = (1, 5)$ getekend. Als $P = (x, y)$ op de middelloodlijn ligt, dan is $d(P, A) = d(P, B)$ dus



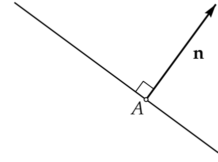
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}.$$

Kwadrateren, haakjes uitwerken en vereenvoudigen leidt tot de *lineaire* vergelijking

$$2y - x = 4.$$

Controleer dit zelf; merk daarbij op dat de termen met x^2 en y^2 tegen elkaar wegvallen! Zo vinden we dus een vergelijking voor de middelloodlijn van A en B. Het midden $(2, 3)$ van het lijnstuk AB ligt er op, en inderdaad snijdt de middelloodlijn dat lijnstuk daar loodrecht.

In de volgende opgaven zijn telkens een vector **n** en een punt A gegeven. Bepaal de vergelijking van de lijn door A die **n** als normaalvector heeft.



13.8

a. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = (0, -3)$

b. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = (4, 3)$

c. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = (-1, 2)$

d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A = (5, 0)$

e. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$, $A = (1, -2)$

13.9

a. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = (2, -3)$

b. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = (4, 7)$

c. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$, $A = (5, 8)$

d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$, $A = (2, 4)$

e. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $A = (8, 8)$

13.10

a. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = (1, 3)$

b. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = (-4, 2)$

c. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = (-3, 0)$

d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = (-5, 2)$

e. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A = (2, -1)$

13.11

a. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = (2, 3)$

b. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = (-3, 8)$

c. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A = (-4, 7)$

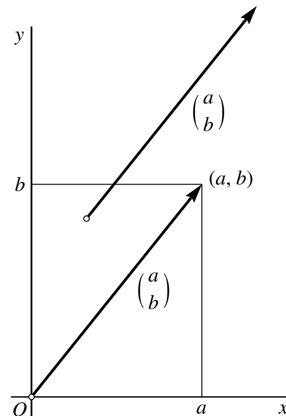
d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$, $A = (-2, 7)$

e. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $A = (5, -3)$

De normaalvector van een lijn

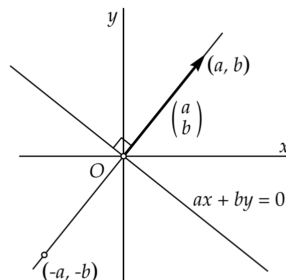
In veel toepassingen van de wiskunde wordt gewerkt met *vectoren* om grootheden voor te stellen die een grootte en een richting hebben. Een vector is een pijl met de desbetreffende grootte en richting. Gelijk gerichte pijlen die even lang zijn, stellen *dezelfde* vector voor. Je kunt het beginpunt van een vector dus vrij kiezen. Vectoren geven we vaak aan door een vet gedrukte letter.

Is in een vlak een orthonormaal coördinatenstelsel Oxy gegeven, dan kun je een vector $\mathbf{v}$ die in dat vlak ligt coördinaten geven door de pijl in de oorsprong te laten beginnen. De coordinaten van het eindpunt zijn dan de coördinaten van de vector $\mathbf{v}$. Om ze te onderscheiden van puntcoördinaten zetten we de coördinaten van een vector onder elkaar. De vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is dus de vector die voorgesteld wordt door de pijl die van de oorsprong O naar het punt (a, b) loopt, of door iedere andere pijl die even groot is en dezelfde richting heeft.



De middelloodlijn van (a, b) en $(-a, -b)$ is de verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot (a, b) en $(-a, -b)$. Het zijn de punten (x, y) die voldoen aan $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}$. Na kwadrateren en vereenvoudigen geeft dit $ax + by = 0$.

Dit is de vergelijking van een lijn die door de oorsprong gaat. De vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ staat blijkbaar loodrecht op die lijn. Men noemt elke vector die loodrecht staat op een lijn een *normaalvector* van die lijn. Omdat $ax + by = c$ voor elke keuze van c een lijn voorstelt die evenwijdig is met de lijn $ax + by = 0$, geldt dus



> *De vector* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *is voor elke* c *een normaalvector van de lijn* $ax + by = c$.

In de volgende opgaven zijn telkens een punt A en de vergelijking van een lijn gegeven. Bepaal de vergelijking van de lijn door A die de gegeven lijn loodrecht snijdt.

13.12
- a. $A = (2, 0)$, $2x - 3y = 4$
- b. $A = (3, -2)$, $4x + 5y = -1$
- c. $A = (-1, 1)$, $x - 7y = 2$
- d. $A = (8, -6)$, $4x + 3y = 5$
- e. $A = (-2, 1)$, $3x - 3y = 1$

13.13
- a. $A = (0, 0)$, $4x - 9y = 1$
- b. $A = (0, -3)$, $2x + 7y = -2$
- c. $A = (-2, 1)$, $-x + 5y = 3$
- d. $A = (4, 6)$, $4x + 5y = 8$
- e. $A = (-4, 1)$, $2x - 7y = 6$

In de volgende opgaven zijn telkens een punt A en de vergelijking van een lijn gegeven. Bepaal het voetpunt van de loodlijn uit A op de gegeven lijn (met andere woorden: bepaal de loodrechte projectie van A op de gegeven lijn.)

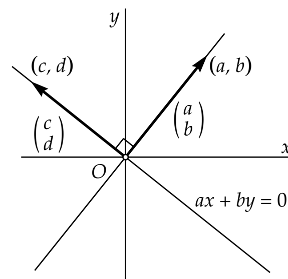
13.14
- a. $A = (1, -2)$, $2x - 3y = 0$
- b. $A = (1, 1)$, $x + y = -1$
- c. $A = (2, 0)$, $2x - y = 1$
- d. $A = (1, -1)$, $2x + y = -2$
- e. $A = (-2, 2)$, $x - 3y = 3$

13.15
- a. $A = (0, 5)$, $x - 4y = 1$
- b. $A = (1, -3)$, $x + 2y = -2$
- c. $A = (2, -1)$, $-x + y = 3$
- d. $A = (-2, 2)$, $3x + y = 1$
- e. $A = (4, 0)$, $2x - y = 6$

Loodrechte stand van lijnen en vectoren

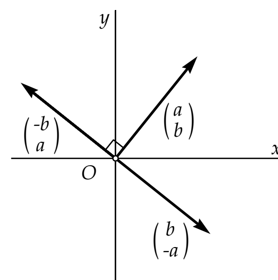
We hebben gezien dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een normaalvector is van elke lijn van de vorm $ax + by = c$, en in het bijzonder dus ook van de lijn $ax + by = 0$ die door de oorsprong gaat.

Voor elk punt (c, d) op die lijn $ax + by = 0$ geldt $ac + bd = 0$. De bijbehorende vector $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ staat dan loodrecht op de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. We geven dit aan met het teken $\perp$. Er geldt dus



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff ac + bd = 0.$$

In het bijzonder staan de vectoren $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ loodrecht op de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, want $(-b) \times a + a \times b = 0$ en $b \times a + (-a) \times b = 0$. Deze vectoren hebben allemaal dezelfde lengte, en de eerste ontstaat uit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ door een rotatie over 90 graden tegen de klok in, de tweede door een rotatie over 90 graden met de klok mee.



Als we zeggen dat $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een normaalvector is van de lijn $ax + by = c$, gaan we er stilzwijgend van uit dat a en b niet beide nul zijn, want in dat geval is $ax + by = c$ geen vergelijking van een lijn. Maar als vector kunnen we natuurlijk wel over de *nulvector* $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ spreken. Het is de 'pijl' zonder richting en met lengte nul. Omdat $a \times 0 + b \times 0 = 0$ is, spreken we af dat de nulvector loodrecht staat op elke andere vector (en op zichzelf).

In de volgende opgaven zijn telkens twee vectoren **a** en **b** gegeven. Bereken de cosinus van de hoek tussen die vectoren en (met behulp van een rekenmachine) die hoek in graden nauwkeurig.

13.16

a. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

13.17

a. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

e. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

In de volgende opgaven zijn telkens de vergelijkingen van twee lijnen gegeven. Bereken met behulp van een rekenmachine de hoek waaronder ze elkaar snijden in graden nauwkeurig. Neem die hoek steeds kleiner dan of gelijk aan 90 graden.

13.18

a. $x + y = 3, \quad 2x - 3y = 4$

b. $x - 2y = 5, \quad 4x + 5y = -1$

c. $2x - 2y = 1, \quad x + y = -3$

d. $2x - y = 3, \quad x - y = 1$

e. $x - 2y = -1, \quad x + 3y = -3$

13.19

a. $x + 2y = 0, \quad 2x + 3y = 1$

b. $-2x - y = 5, \quad 4x = -1$

c. $3x + y = 1, \quad -4x + y = -2$

d. $6x - 7y = 1, \quad -2x - 3y = 0$

e. $-3x - 2y = 2, \quad 3x + y = 2$

Het inproduct

Bij elk tweetal vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ definieert men het *inproduct*, notatie $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, door

$$\boxed{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.}$$

Andere namen die hiervoor gebruikt worden, zijn *inwendig product* en *scalair product*[1].

In de vorige paragraaf hebben we al gezien dat $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ als $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ en omgekeerd. Verder volgt uit de stelling van Pythagoras dat voor de lengte $|\mathbf{a}|$ van een vector $\mathbf{a}$ geldt dat

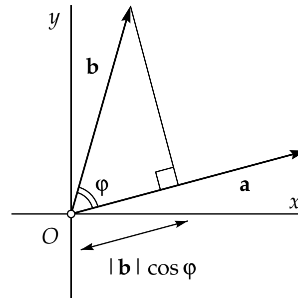
$$\boxed{|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.}$$

In het algemeen is er voor het inproduct een meetkundige interpretatie waaruit deze beide eigenschappen als bijzondere gevallen voortvloeien. Men kan namelijk bewijzen dat

$$\boxed{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi}$$

waarin φ de hoek is die de twee vectoren met elkaar in de oorsprong maken.[2]

Merk op dat $|\mathbf{b}| \cos \varphi$ de lengte is van de projectie van de vector $\mathbf{b}$ op de drager van de vector $\mathbf{a}$ (voorzien van een minteken als φ een stompe hoek is, want dan is de cosinus negatief). Je kunt de rol van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ daarbij natuurlijk ook verwisselen: het inproduct is ook de lengte van $\mathbf{b}$ maal de lengte van de projectie van $\mathbf{a}$ op de drager van $\mathbf{b}$. Ook meetkundig gezien is het hiermee duidelijk dat het inproduct nul is als de vectoren loodrecht op elkaar staan (want dan is $\cos \varphi = 0$), en dat het gelijk is aan het kwadraat van de lengte als de beide vectoren samenvallen (want dan is $\cos \varphi = 1$).



[1]In de Engelstalige literatuur wordt ook wel *dot product* gebruikt; het inproduct van **a** en **b** wordt dan genoteerd als $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$.

[2]Zie de bladzijden 137 en 147 voor de definitie van de cosinus.

14. Cirkels

In elk van de volgende opgaven zijn een middelpunt M en een straal r gegeven. Schrijf telkens de vergelijking van de cirkel met dat middelpunt en die straal in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

14.1
a. $M = (0, 0)$ en $r = 2$
b. $M = (2, 0)$ en $r = 2$
c. $M = (0, -3)$ en $r = 5$
d. $M = (1, 2)$ en $r = 4$
e. $M = (-2, 2)$ en $r = 2\sqrt{2}$

14.2
a. $M = (4, 0)$ en $r = 1$
b. $M = (3, -2)$ en $r = \sqrt{13}$
c. $M = (2, -1)$ en $r = 5$
d. $M = (1, 7)$ en $r = 7$
e. $M = (-5, 12)$ en $r = 13$

Onderzoek of de volgende vergelijkingen cirkels voorstellen. Zo ja, bepaal dan het middelpunt en de straal.

14.3
a. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
b. $x^2 + y^2 + x - y - 1 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$
d. $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$
e. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = 0$

14.4
a. $x^2 + y^2 = 4x - 5$
b. $x^2 + y^2 = 4x + 5$
c. $x^2 + y^2 = 4y - 4$
d. $3x^2 + 3y^2 = 2y$
e. $4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 19 = 0$

Bepaal een vergelijking van de cirkel door de volgende drie punten. Maak eerst een tekening op ruitjespapier!

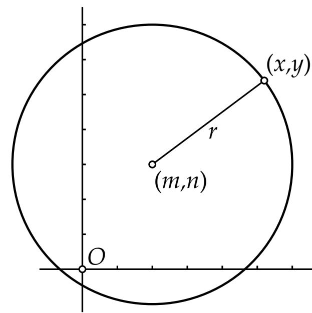
14.5
a. $(0, 0)$, $(2, 0)$ en $(0, 2)$
b. $(0, 0)$, $(2, 0)$ en $(0, 4)$
c. $(0, 0)$, $(6, 0)$ en $(0, 8)$
d. $(0, 0)$, $(2, 2)$ en $(2, -2)$
e. $(3, 4)$, $(3, 0)$ en $(0, 4)$

14.6
a. $(1, 1)$, $(1, 5)$ en $(5, 1)$
b. $(-2, 0)$, $(-2, 2)$ en $(2, 2)$
c. $(1, -2)$, $(1, 0)$ en $(-1, -2)$
d. $(3, 3)$, $(3, 1)$ en $(1, 3)$
e. $(-1, -2)$, $(-1, 0)$ en $(0, -1)$

Cirkelvergelijkingen

De cirkel met middelpunt $M = (m, n)$ en straal r is de verzameling van alle punten met afstand r tot M. Als zo'n punt P coördinaten (x, y) heeft, geldt dus $d(P, M) = r$, dat wil zeggen

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$$



oftewel, na kwadrateren van linker- en rechterlid:

$$\boxed{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.}$$

Dit is de vergelijking van de cirkel met middelpunt (m, n) en straal r. Alle punten (x, y) die aan deze vergelijking voldoen, liggen op de cirkel en omgekeerd voldoen ook alle punten op de cirkel aan deze vergelijking.

Voor de punten (x, y) die *binnen* de cirkel liggen, geldt $(x-m)^2 + (y-n)^2 < r^2$ en voor de punten *buiten* de cirkel geldt $(x-m)^2 + (y-n)^2 > r^2$.

Voorbeeld: hierboven is de cirkel met middelpunt $(2, 3)$ en straal 4 getekend. De vergelijking ervan is $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$. Na haakjes uitwerken en sorteren van de termen kan dit geschreven worden als

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0.$$

In het algemeen kan elke cirkelvergelijking geschreven worden in de gedaante

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

maar niet elke vergelijking van deze gedaante stelt ook een cirkel voor. Neem bijvoorbeeld de vergelijking

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 14 = 0.$$

Via kwadraatafsplitsen (zie bladzijde 77) kun je dit schrijven als

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = -1$$

(controleer dit zelf!). Het linkerlid is als som van twee kwadraten altijd groter dan of gelijk aan nul, maar het rechterlid is negatief, dus aan deze vergelijking voldoet geen enkel punt (x, y). De vergelijking kan dus ook geen cirkel voorstellen.

Ga zelf na dat aan de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$ slechts één punt voldoet. Het is een 'cirkel' met straal 0.

Bereken de snijpunten van de volgende cirkels met de beide coördinaatassen, voor zover aanwezig.

14.7

a. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
b. $x^2 + y^2 + x - y - 1 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$
d. $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$
e. $x^2 + y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$

14.8

a. $x^2 + y^2 = 4x + 5$
b. $x^2 + y^2 = 4x + 6y - 5$
c. $x^2 + y^2 = 4y - 2$
d. $3x^2 + 3y^2 = 2y$
e. $4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 19 = 0$

In de volgende opgaven zijn telkens een cirkel en een lijn gegeven. Bepaal hun eventuele snijpunten.

14.9

a. $x^2 + y^2 = 9$ en $x = 2$
b. $x^2 + y^2 = 9$ en $x = 2y$
c. $x^2 + y^2 = 9$ en $x + y = 3$
d. $x^2 + y^2 = 9$ en $x + 2y = -3$
e. $x^2 + y^2 = 9$ en $x - y = 3\sqrt{2}$

14.10

a. $x^2 + y^2 = 16$ en $y = -2$
b. $x^2 + y^2 = 16$ en $3x = 4y$
c. $x^2 + y^2 = 16$ en $x + y = -4$
d. $x^2 + y^2 = 16$ en $x - 2y = 4$
e. $x^2 + y^2 = 16$ en $x = \sqrt{3}y$

14.11

a. $x^2 + y^2 + 10x - 8y = 0$ en $x = y$
b. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ en $x + y = 7$
c. $x^2 + y^2 + 12x + 11 = 0$ en $x - y = -1$
d. $x^2 + y^2 - 16x - 4y + 4 = 0$ en $3x + y = 2$
e. $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$ en $-2x + y = 3$

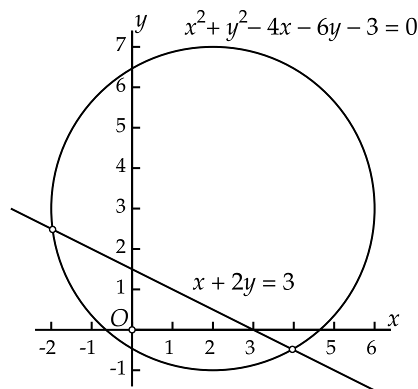
14.12 In deze opgave zijn telkens een lijn L, een punt P en een afstand d gegeven. Bepaal alle punten op L met een afstand d tot P. Maak ter oriëntatie telkens eerst een ruwe schets.

a. $L:\ x = 1,\quad P = (-3, 1),\quad d = 5$
b. $L:\ -x + 4y = 13,\quad P = (2, -2),\quad d = 2$
c. $L:\ x + y = 1,\quad P = (0, 0),\quad d = 5$
d. $L:\ -x + 3y = 4,\quad P = (-4, -1),\quad d = \sqrt{13}$
e. $L:\ 2x - y = 1,\quad P = (1, -1),\quad d = 2$

De snijpunten van een cirkel en een lijn

Een cirkel en een lijn kunnen twee, één of nul snijpunten hebben. Is er maar één snijpunt, dan raakt de lijn de cirkel in dat punt. Het bepalen van de snijpunten illustreren we aan de hand van een voorbeeld. Stel dat de cirkel en de lijn gegeven worden door de vergelijkingen

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \qquad \text{en} \qquad x + 2y = 3.$$



De vergelijking van de lijn kunnen we schrijven als $x = 3 - 2y$. Substitueren we dit in de cirkelvergelijking, dan krijgen we

$$(3 - 2y)^2 + y^2 - 4(3 - 2y) - 6y - 3 = 0.$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking in y die via haakjes uitwerken en sorteren vereenvoudigd kan worden tot

$$5y^2 - 10y - 6 = 0$$

(controleer dit zelf!).
De *abc*-formule levert de oplossingen:

$$y_1 = \frac{10 + \sqrt{220}}{10} = 1 + \frac{1}{5}\sqrt{55} \quad \text{en} \quad y_2 = \frac{10 - \sqrt{220}}{10} = 1 - \frac{1}{5}\sqrt{55}$$

en substitueren we dit weer in de vergelijking $x = 3 - 2y$ van de lijn dan krijgen we

$$x_1 = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{55} \qquad \text{en} \qquad x_2 = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{55}.$$

De twee snijpunten zijn dus

$$\left(1 - \frac{2}{5}\sqrt{55}, 1 + \frac{1}{5}\sqrt{55}\right) \qquad \text{en} \qquad \left(1 + \frac{2}{5}\sqrt{55}, 1 - \frac{1}{5}\sqrt{55}\right).$$

Bepaal de eventuele snijpunten van de volgende paren cirkels.

14.13

a. $x^2 + y^2 = 4$
$x^2 + y^2 - 4x = 0$

b. $x^2 + y^2 = 9$
$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 3$

c. $x^2 + y^2 = 25$
$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$

d. $x^2 + y^2 = 4$
$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

e. $x^2 + y^2 = 36$
$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

14.14

a. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$
$x^2 + y^2 - 4x = 0$

b. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

c. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$
$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

d. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$
$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

e. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

14.15

a. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 5$
$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 11$

b. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$
$x^2 + y^2 - 3x + 2y = 1$

c. $x^2 + y^2 - 5x - y - 6 = 0$
$x^2 + y^2 + 3x + 2y + 2 = 0$

d. $x^2 + y^2 - x - 5y + 2 = 0$
$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$

e. $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$
$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 15 = 0$

14.16

a. $x^2 + y^2 + 2x = 3$
$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 3x - y = 1$
$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 4 = 0$

c. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$
$x^2 + y^2 + 3x + 2y - 7 = 0$

d. $x^2 + y^2 - x + y = 0$
$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$

e. $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$
$x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$

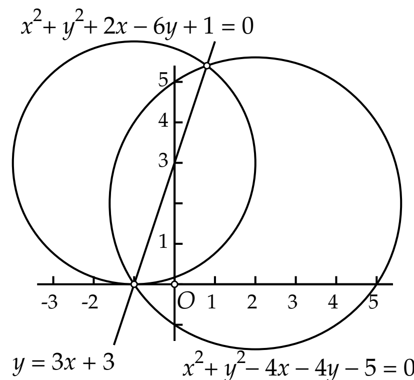
14.17 Bepaal een vergelijking van

a. de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ die de lijn $x = 4$ raakt.
b. de cirkel met middelpunt $(2, 0)$ die de lijn $x = y$ raakt.
c. de cirkel met middelpunt $(0, 2)$ die de lijn $4x = 3y$ raakt.
d. de cirkel met middelpunt $(-1, -1)$ die de lijn $x + 2y = 0$ raakt.
e. de cirkel met middelpunt $(1, 2)$ die de lijn $x + y = -1$ raakt.

De snijpunten van twee cirkels

Twee verschillende cirkels hebben twee, één of nul snijpunten. Hebben ze één snijpunt, dan raken ze elkaar in dat punt. Uiteraard hebben twee verschillende concentrische cirkels (cirkels met hetzelfde middelpunt) geen snijpunten. We nemen daarom in het vervolg steeds cirkels met verschillende middelpunten. We illustreren het bepalen van de snijpunten van twee cirkels weer aan de hand van een voorbeeld.

Stel dat de cirkels gegeven worden door de vergelijkingen



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Elk snijpunt (x, y) is dan een oplossing van dit stelsel van twee vergelijkingen. Trekken we de onderste van de bovenste af, dan krijgen we de *lineaire* vergelijking

$$6x - 2y + 6 = 0$$

oftewel $y = 3x + 3$.

Substitueer je dit in een van de twee cirkelvergelijkingen, bijvoorbeeld in de bovenste, dan ontstaat

$$x^2 + (3x + 3)^2 + 2x - 6(3x + 3) + 1 = 0$$

oftewel

$$10x^2 + 2x - 8 = 0.$$

De *abc*-formule geeft $x_1 = \frac{4}{5}$ en $x_2 = -1$. Omdat iedere oplossing (x, y) ook moet voldoen aan de hierboven gevonden lineaire vergelijking $y = 3x + 3$ geldt dus $y_1 = 3 \times \frac{4}{5} + 3 = \frac{27}{5}$ en $y_2 = 3 \times (-1) + 3 = 0$. De snijpunten zijn blijkbaar

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{27}{5}\right) \qquad \text{en} \qquad (-1, 0).$$

Je kunt de proef op de som nemen door ze in de oorspronkelijke cirkelvergelijkingen in te vullen.

14.18 Bepaal een vergelijking van de raaklijn aan de gegeven cirkel in het gegeven punt A.

a. $x^2 + y^2 = 5, \quad A = (1, 2)$
b. $x^2 + y^2 = 2, \quad A = (1, -1)$
c. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0, \quad A = (1, 1)$
d. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 8 = 0, \quad A = (2, 0)$
e. $x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0, \quad A = (1, -1)$

14.19

a. Bepaal alle snijpunten van de cirkel van de figuur op de volgende bladzijde met de twee cordinaatassen.
b. Bepaal een vergelijking van de raaklijn aan die cirkel in elk van die snijpunten.

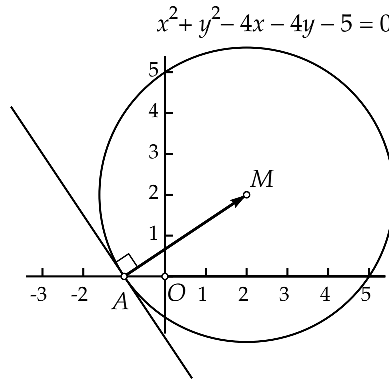
14.20 Bepaal bij elk van de volgende cirkels de vergelijkingen van de verticale en de horizontale raaklijnen.

a. $x^2 + y^2 + 2x = 2$
b. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 20$
c. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$
d. $x^2 + y^2 + 2x + 8y = 0$
e. $x^2 + y^2 - 6y - 2x - 2 = 0$

Raaklijnen aan een cirkel

Hiernaast zie je de cirkel

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$$



met middelpunt $M = (2,2)$. In het punt $A = (-1,0)$, dat op die cirkel ligt, is de raaklijn aan de cirkel getekend. Hoe vinden we de vergelijking van die raaklijn?
Omdat de straal MA loodrecht staat op de raaklijn, is de vector **r** die van A naar M loopt, een normaalvector van de raaklijn. De coördinaten ervan zijn $\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

We kennen nu een normaalvector van de raaklijn. De vergelijking ervan is dus van de vorm $3x + 2y = c$. Omdat het punt $A = (-1,0)$ er op ligt, kunnen we c ook berekenen: $c = -3$. De vergelijking van de raaklijn is dus

$$3x + 2y = -3.$$

De methode is algemeen bruikbaar:

Als $M = (m_1, m_2)$ het middelpunt van een cirkel en $A = (a_1, a_2)$ een punt op die cirkel is, dan is een vergelijking van de raaklijn aan de cirkel in A

$$(m_1 - a_1)x + (m_2 - a_2)y = (m_1 - a_1)a_1 + (m_2 - a_2)a_2.$$

15. Meetkunde in de ruimte

Bereken de afstand van de volgende paren punten

15.1

a. $(0,0,0)$ en $(1,0,-3)$
b. $(2,0,1)$ en $(-2,1,0)$
c. $(0,0,0)$ en $(-1,1,-5)$
d. $(3,-1,1)$ en $(2,-3,3)$
e. $(1,2,2)$ en $(-4,0,0)$

15.2

a. $(1,2,-1)$ en $(0,1,-2)$
b. $(3,2,-1)$ en $(4,-1,-2)$
c. $(-1,-3,0)$ en $(3,0,1)$
d. $(-1,1,0)$ en $(0,0,-2)$
e. $(1,1,1)$ en $(-2,2,2)$

Bereken in de volgende opgaven de coördinaten van de vector (pijl) die in het gegeven punt A begint en in het gegeven punt B eindigt.

15.3

a. $A = (3,1,0)$, $B = (0,0,3)$
b. $A = (1,3,0)$, $B = (-1,2,1)$
c. $A = (2,-1,0)$, $B = (1,5,-1)$
d. $A = (0,-2,1)$, $B = (3,0,5)$
e. $A = (2,-1,1)$, $B = (1,-4,2)$

15.4

a. $A = (0,3,2)$, $B = (1,1,-2)$
b. $A = (3,2,1)$, $B = (0,4,-1)$
c. $A = (-2,3,-1)$, $B = (1,3,5)$
d. $A = (-1,2,2)$, $B = (0,2,-2)$
e. $A = (-1,1,-1)$, $B = (0,2,2)$

Bereken in de volgende opgaven de cosinus van $\angle AOB$ (O is de oorsprong) en bereken vervolgens met je rekenmachine ook die hoek in graden nauwkeurig.

15.5

a. $A = (0,1,0)$, $B = (0,2,3)$
b. $A = (1,-3,1)$, $B = (0,2,1)$
c. $A = (2,-1,2)$, $B = (1,3,-1)$
d. $A = (-1,-2,0)$, $B = (3,0,1)$
e. $A = (0,-1,1)$, $B = (0,4,-4)$

15.6

a. $A = (0,1,2)$, $B = (1,-1,1)$
b. $A = (0,2,1)$, $B = (0,1,-2)$
c. $A = (-2,3,1)$, $B = (1,-3,5)$
d. $A = (-1,2,1)$, $B = (0,1,-2)$
e. $A = (-2,1,-1)$, $B = (0,2,1)$

15.7 Bereken de hoek tussen een lichaamsdiagonaal van een kubus en een van de ribben.

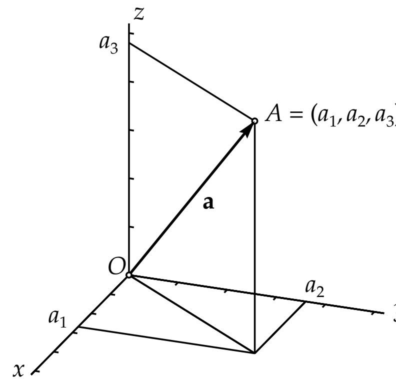
15.8 De punten $A = (1,1,1)$, $B = (-1,-1,1)$, $C = (-1,1,-1)$ en $D = (1,-1,-1)$ zijn de hoekpunten van een viervlak $ABCD$. Laat zien dat de ribben van dit viervlak allemaal dezelfde lengte hebben, en dat overstaande ribben (zoals AB en CD) loodrecht op elkaar staan.

15.9 Geef een vergelijking van elk van de zijvlakken van het regelmatige viervlak uit de vorige opgave en bereken ook de cosinus van de hoek die twee van die vlakken met elkaar maken.

Coördinaten en inproduct in de ruimte

In de ruimte werken we met drie coördinaten. Een orthonormaal coördinatenstelsel $Oxyz$ is daar een stelsel met drie onderling loodrechte coördinaatassen met daarop gelijke schaalverdelingen.

Voor een punt A met coördinaten (a_1, a_2, a_3) geldt volgens de (tweemaal toegepaste) stelling van Pythagoras dat de afstand tot de oorsprong gelijk is aan $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Dit is ook de lengte $|\mathbf{a}|$ van de vector $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, de pijl die van de oorsprong naar A loopt. In het algemeen wordt de afstand van twee punten $A = (a_1, a_2, a_3)$ en $B = (b_1, b_2, b_3)$ gegeven door



$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

In de ruimte wordt het inproduct van de vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gedefinieerd door

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Net als in het vlak geldt dat

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi$$

waarin φ de hoek is tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. In het bijzonder is het inproduct nul als de vectoren loodrecht op elkaar staan en omgekeerd:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0.$$

Wanneer $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, is het inproduct gelijk aan de lengte van $\mathbf{a}$ in het kwadraat:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}|^2.$$

15.10 Bepaal een vergelijking van het vlak door de drie gegeven punten:

a. $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$
b. $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ en $(0,0,4)$
c. $(1,0,0)$, $(0,-1,0)$ en $(0,0,-3)$
d. $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,0)$
e. $(2,1,1)$, $(1,2,1)$ en $(1,1,2)$
f. $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ en $(1,1,1)$
g. $(0,0,0)$, $(0,-1,1)$ en $(1,1,0)$
h. $(3,3,0)$, $(1,1,1)$ en $(0,0,7)$

Bepaal bij de volgende opgaven een vergelijking van het middelloodvlak van de gegeven paren punten.

15.11
a. $(1,1,0)$ en $(0,1,1)$
b. $(2,1,0)$ en $(1,0,4)$
c. $(1,0,1)$ en $(0,1,-3)$
d. $(1,1,1)$ en $(0,0,0)$
e. $(2,1,1)$ en $(1,1,2)$

15.12
a. $(1,-1,2)$ en $(1,1,1)$
b. $(3,1,-1)$ en $(1,5,1)$
c. $(0,0,1)$ en $(2,1,-3)$
d. $(1,1,-1)$ en $(4,0,0)$
e. $(2,2,1)$ en $(1,2,2)$

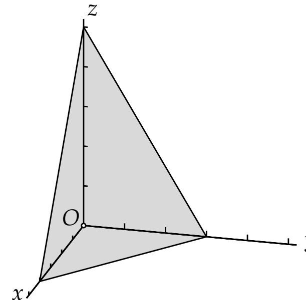
Bepaal bij de volgende opgaven een vergelijking van het vlak door A met $\mathbf{n}$ als normaalvector.

15.13
a. $A = (1,1,0)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
b. $A = (0,1,2)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
c. $A = (2,1,-1)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$
d. $A = (0,5,5)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$
e. $A = (3,1,3)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

15.14
a. $A = (-2,0,0)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$
b. $A = (1,4,1)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$
c. $A = (5,1,-2)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$
d. $A = (6,0,0)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
e. $A = (4,0,4)$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Vlakken en normaalvectoren

Een lineaire vergelijking in x, y en z zoals $15x + 20y + 12z = 60$ stelt een vlak in de ruimte voor. Het snijpunt met de x-as vinden we door $y = z = 0$ te stellen, waaruit volgt dat $15x = 60$ oftewel $x = 4$. Dat snijpunt is dus $(4, 0, 0)$. Op net zo'n manier vind je het snijpunt $(0, 3, 0)$ met de y-as en het snijpunt $(0, 0, 5)$ met de z-as.

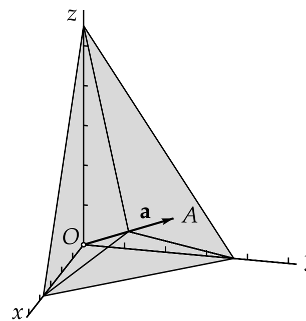


Maar als de coëfficiënt van x, y of z in de vergelijking van het vlak nul is, is er geen snijpunt met de bijbehorende as. Het vlak is dan evenwijdig aan die as. Zo is bijvoorbeeld het vlak $2x + 3y = 4$ evenwijdig aan de z-as.

Het *middelloodvlak* van twee punten $A = (a_1, a_2, a_3)$ en $B = (b_1, b_2, b_3)$ is de verzameling van alle punten $P = (x, y, z)$ waarvoor geldt dat $d(P, A) = d(P, B)$.

Als voorbeeld bepalen we de vergelijking van het middelloodvlak van het punt $A = (3, 3, 2)$ en de oorsprong $O = (0, 0, 0)$. De vergelijking $d(P, A) = d(P, O)$ met $P = (x, y, z)$ leidt na kwadrateren, vereenvoudigen en sorteren (controleer dit zelf!) tot

$$3x + 3y + 2z = 11.$$



Hiernaast is dat middelloodvlak getekend. De bijbehorende vector **a** die van O naar A loopt, staat loodrecht op dat vlak. We noemen dit weer een *normaalvector* op het vlak.

In het algemeen is de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (waarbij a, b en c niet alledrie nul mogen zijn) een normaalvector op ieder vlak $ax + by + cz = d$ (met d willekeurig). Als $P = (x_0, y_0, z_0)$ een punt is in zo'n vlak, wordt een vergelijking ervan gegeven door

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

of, anders geschreven, door

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

15.15 In de figuur op de tegenoverliggende bladzijde zijn de snijpunten van de vlakken α en β met enige ribben van de getekende kubus aangegeven. Controleer dat de gegeven coördinaten van die punten juist zijn.

15.16 Hieronder zijn telkens een punt A en een vlak α gegeven. Bepaal een vergelijking van het vlak door A evenwijdig aan α.

a. $A = (0, 0, -4)$, $\alpha : 3x + 2y - 4z = 7$
b. $A = (1, -1, 0)$, $\alpha : 2x - 2y - 3z = 1$
c. $A = (1, 2, -1)$, $\alpha : -2x + 3y - z = 2$
d. $A = (0, 2, -2)$, $\alpha : 5x - y + 7z = 0$
e. $A = (1, -2, 1)$, $\alpha : x + 2z = 3$
f. $A = (4, 5, -6)$, $\alpha : x = 7$

15.17 Geef in de volgende gevallen telkens drie verschillende punten op de snijlijn van de vlakken α en β.

a. $$\begin{cases} x - 3y + 2z = 4 & (\alpha) \\ 2x - y - z = 2 & (\beta) \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 7 & (\alpha) \\ -2x + 3y - 5z = 1 & (\beta) \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} 3x - 3y - 4z = 3 & (\alpha) \\ 8x - 2z = 5 & (\beta) \end{cases}$$

d. $$\begin{cases} -x - 5y + 3z = 0 & (\alpha) \\ 5x + y = 1 & (\beta) \end{cases}$$

e. $$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 & (\alpha) \\ -x + y + z = 3 & (\beta) \end{cases}$$

f. $$\begin{cases} x = 4 & (\alpha) \\ 3x + y + z = 7 & (\beta) \end{cases}$$

g. $$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 4 & (\alpha) \\ -x - y + z = 3 & (\beta) \end{cases}$$

h. $$\begin{cases} x + 8y + 6z = 0 & (\alpha) \\ 3x + y + z = 0 & (\beta) \end{cases}$$

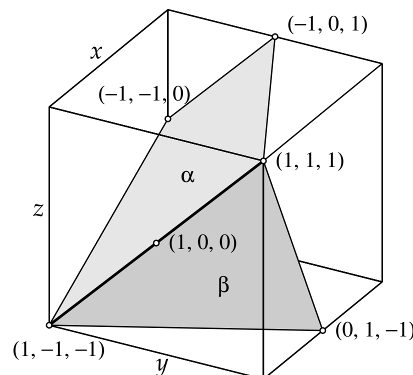
Evenwijdige en elkaar snijdende vlakken

Twee verschillende vlakken zijn óf evenwijdig, óf ze snijden elkaar in een lijn. Als ze evenwijdig zijn, is dat direct aan de vergelijkingen te zien, want dan zijn de normaalvectoren een veelvoud van elkaar. Is dat niet het geval, dan zijn er oneindig veel punten die in beide vlakken liggen, en samen vormen die punten de snijlijn. We geven een voorbeeld van dat laatste geval: de vlakken α met vergelijking $x - 2y + 2z = 1$ en β met vergelijking $2x + y - z = 2$. Alle snijpunten (x, y, z) voldoen aan het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & - & 2y & + & 2z & = & 1 & \quad (\alpha) \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 & \quad (\beta). \end{array} \right.$$

Dit is een stelsel van twee vergelijkingen met drie onbekenden. Er zijn oneindig veel oplossingen. Je kunt namelijk één van de drie onbekenden, bijvoorbeeld z, vrij kiezen, waarna de andere twee uit de twee vergelijkingen kunnen worden afgeleid. Kies je bijvoorbeeld $z = 0$, dan krijg je $x - 2y = 1$ en $2x + y = 2$ met als oplossing $x = 1$ en $y = 0$. Het punt $(1, 0, 0)$ ligt dus op de snijlijn. Een andere keuze, bijvoorbeeld $z = 1$, geeft weer een ander punt op de snijlijn, namelijk $(1, 1, 1)$, zoals je zelf kunt controleren. Voor $z = -1$ krijg je het punt $(1, -1, -1)$. Op dezelfde manier kun je net zo veel punten op de snijlijn vinden als je wilt.

Hiernaast zijn de vlakken α en β getekend voor zover ze binnen de kubus met zijvlakken $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ liggen. De snijlijn is de lijn door $(1, -1, -1)$ en $(1, 1, 1)$. Je ziet dat de snijlijn in dit geval in het vlak $x = 1$ ligt. Dat betekent dat je x, in tegenstelling tot y of z, *niet* vrij kunt kiezen. als je punten op de snijlijn wilt bepalen. De eerste coördinaat van elk punt op de snijlijn is immers altijd gelijk aan 1. Je kunt nagaan dat elk punt van de snijlijn van de vorm $(1, t, t)$ is voor zekere t.



15.18 Hieronder zijn telkens drie vlakken α, β en γ gegeven. Beschrijf hun onderlinge ligging. Geef het snijpunt als ze elkaar in één punt snijden. Geef twee punten op de snijlijn als ze elkaar in een lijn snijden.

a. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 2z & = & 3 & (\alpha) \\ x & - & 3y & + & 3z & = & 4 & (\beta) \\ 3x & - & y & + & z & = & 4 & (\gamma) \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & - & 3y & - & 3z & = & 3 & (\alpha) \\ x & - & 4y & - & 2z & = & 0 & (\beta) \\ 2x & + & y & + & 3z & = & -5 & (\gamma) \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & 4y & + & 3z & = & -3 & (\alpha) \\ 2x & - & 3y & - & z & = & -5 & (\beta) \\ 2x & + & 2y & & & = & 0 & (\gamma) \end{array}\right.$

d. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & + & 2z & = & 1 & (\alpha) \\ -2x & + & y & + & z & = & 5 & (\beta) \\ -3x & + & 6y & - & 6z & = & 4 & (\gamma) \end{array}\right.$

e. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 3y & + & 2z & = & 2 & (\alpha) \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 & (\beta) \\ & - & y & - & 2z & = & 1 & (\gamma) \end{array}\right.$

f. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 4x & & & + & 4z & = & 8 & (\alpha) \\ x & + & 3y & - & 3z & = & -5 & (\beta) \\ 3x & - & y & - & z & = & 3 & (\gamma) \end{array}\right.$

g. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 3y & - & 3z & = & 1 & (\alpha) \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 4 & (\beta) \\ 2x & + & 6y & - & 6z & = & -2 & (\gamma) \end{array}\right.$

h. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 6y & - & 3z & = & 3 & (\alpha) \\ 2x & - & 2y & + & 3z & = & -3 & (\beta) \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 2 & (\gamma) \end{array}\right.$

15.19 Geef een meetkundige verklaring voor hetgeen er bij de stelsels vergelijkingen van de opgaven op bladzijde 82 aan de hand is.

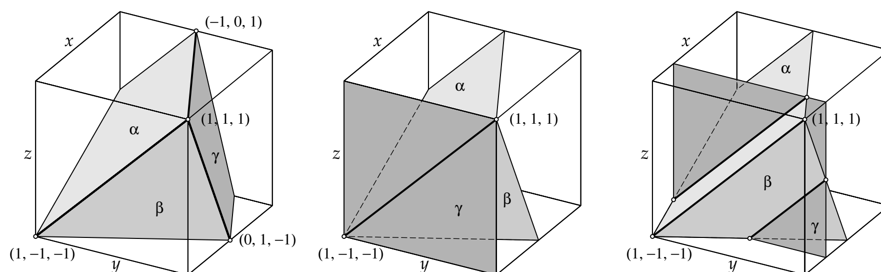
De drievlakkenstelling

Bij drie vlakken zijn er verschillende mogelijkheden voor hun onderlinge ligging. De vlakken worden gegeven door drie vergelijkingen, en eventuele gemeenschappelijke punten vind je als de oplossingen van het bijbehorende stelsel van vergelijkingen.

Als minstens twee van de drie vlakken onderling evenwijdig zijn, hebben ze geen gemeenschappelijke punten. Je kunt dit direct aan de vergelijkingen zien, want bij evenwijdige vlakken zijn de normaalvectoren een veelvoud van elkaar.

Als geen twee van de drie vlakken onderling evenwijdig zijn, zijn er nog drie mogelijkheden. Ze worden beschreven in de zogenaamde *drievlakkenstelling*:

> *Voor drie verschillende vlakken, geen twee evenwijdig, geldt:*
> *– ze snijden elkaar in één punt, of*
> *– ze snijden elkaar in één lijn, of*
> *– ze snijden elkaar twee aan twee in drie evenwijdige lijnen.*



Die mogelijkheden worden hierboven geïllustreerd voor drie vlakken α, β en γ met telkens

$$\alpha: \quad x - 2y + 2z = 1 \qquad \text{en} \qquad \beta: \quad 2x + y - z = 2.$$

In het eerste geval is voor γ het vlak $2x - 4y - z = -3$ genomen, dat door de punten $(1,1,1)$, $(-1,0,1)$ en $(0,-1,1)$ gaat. Het snijpunt van α, β en γ is dan het punt $(1,1,1)$.

In het tweede geval is γ het vlak $x = 1$. De gemeenschappelijke snijlijn is de lijn door $(1,1,1)$ en $(1,-1,-1)$. In het derde geval is γ het vlak $x = \frac{1}{2}$.

Je ziet dat de snijlijn van α en β in het eerste geval het vlak γ snijdt, in het tweede geval in γ ligt, en in het derde geval evenwijdig is aan γ.

In elk van de volgende opgaven zijn een middelpunt M en een straal r gegeven. Schrijf telkens de vergelijking van de bol met dat middelpunt en die straal in de vorm $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

15.20

a. $M = (0,0,1)$ en $r = 2$
b. $M = (2,2,0)$ en $r = 2$
c. $M = (1,0,-3)$ en $r = 5$
d. $M = (1,2,-2)$ en $r = 3$
e. $M = (-2,2,0)$ en $r = 7$

15.21

a. $M = (4,0,1)$ en $r = 1$
b. $M = (3,1,-2)$ en $r = \sqrt{13}$
c. $M = (2,0,-1)$ en $r = 5$
d. $M = (1,7,-2)$ en $r = 7$
e. $M = (-5,2,1)$ en $r = 3$

Onderzoek of de volgende vergelijkingen bollen voorstellen. Zo ja, bepaal dan het middelpunt en de straal.

15.22

a. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0$
b. $x^2 + y^2 + z^2 + x - y - 1 = 0$
c. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4z = 0$
d. $x^2 + y^2 + z^2 - 8z + 12 = 0$
e. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z + 36 = 0$

15.23

a. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 5$
b. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z + 5$
c. $x^2 + y^2 + z^2 = 4y + 4z - 4$
d. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 2y$
e. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x - 8y + 12z + 60 = 0$

15.24 Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan de gegeven bol in het gegeven punt.

a. $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad A = (1,2,2)$
b. $x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad A = (1,0,-1)$
c. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 3 = 0, \quad A = (1,1,1)$
d. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 2z - 11 = 0, \quad A = (2,0,-1)$
e. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4z - 9 = 0, \quad A = (1,-1,0)$

15.25

a. Bepaal vergelijkingen in Oyz-coördinaten, respectievelijk Oxz-coördinaten, van de snijcirkels van de bol in de figuur op de volgende bladzijde met de vlakken $x = 0$ respectievelijk $y = 0$.
b. Bepaal het middelpunt en de straal van die cirkels.
c. Bepaal de coördinaten van alle snijpunten van die bol met coördinaatassen.
d. Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan die bol in elk van die snijpunten.

Bollen en raakvlakken

De bol met middelpunt $M = (m_1, m_2, m_3)$ en straal r is de verzameling van alle punten $P = (x, y, z)$ waarvoor $d(P, M) = r$. Uitwerken hiervan levert de vergelijking

$$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = r^2$$

die analoog is aan de vergelijking voor een cirkel in het vlak. Hieronder is als voorbeeld de bol getekend met middelpunt $M = (1, 2, 2)$ en straal $r = 4$. De vergelijking ervan is

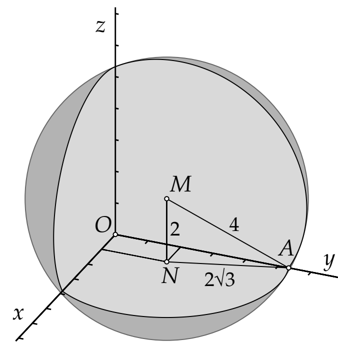
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 16,$$

hetgeen kan worden vereenvoudigd tot

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0.$$

De snijcirkel met het xy-vlak (het vlak $z = 0$) heeft in Oxy-coördinaten de vergelijking

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0.$$



Het middelpunt ervan is $N = (1, 2, 0)$ en de straal is $2\sqrt{3}$. Het snijpunt ervan met de positieve y-as is het punt $A = (0, 2 + \sqrt{11}, 0)$. De snijcirkels met de vlakken $x = 0$ en $y = 0$ kunnen op dezelfde manier worden bepaald. In de tekening zijn alleen het delen van die cirkels die in het eerste octant ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) liggen, getekend.

Op bladzijde 107 hebben we de vergelijking afgeleid voor de raaklijn aan een cirkel in een gegeven punt van die cirkel. Op precies dezelfde wijze vinden we de vergelijking voor het *raakvlak* aan een bol:

Als $M = (m_1, m_2, m_3)$ het middelpunt van een bol en $A = (a_1, a_2, a_3)$ een punt op die bol is, dan is een vergelijking van het raakvlak aan de bol in A

$$(m_1 - a_1)(x - a_1) + (m_2 - a_2)(y - a_2) + (m_3 - a_3)(z - a_3) = 0.$$

Een punt op de bol in het hierboven gegeven voorbeeld is $A = (0, 2 + \sqrt{11}, 0)$. Omdat $M = (1, 2, 2)$ is een vergelijking van het raakvlak aan de bol in A dus

$$x - \sqrt{11}(y - 2 - \sqrt{11}) + 2z = 0.$$

VI Functies

Een functie is een voorschrift om volgens een vaste, welbepaalde regel uit een gegeven getal een ander getal, de *functiewaarde*, te maken. Zo produceert de wortelfunctie bij een gegeven getal x als functiewaarde de wortel $\sqrt{x}$ uit dat getal. Vergelijk het met de worteltoets van een rekenmachine, die bij elk 'invoergetal' x dat je intoetst, in het venster het 'uitvoergetal' $\sqrt{x}$ (afgerond op een vast aantal decimalen) laat zien.
In dit deel behandelen we allerlei veel gebruikte functies en hun grafieken. In het laatste hoofdstuk beschrijven we geparametriseerde krommen in het vlak en in de ruimte.

16. Functies en grafieken

Bereken van de volgende lijnen in het vlak de richtingscoëfficiënt:

16.1

a. $3x + 5y = 4$
b. $2x = y + 7$
c. $-4x + 2y = 3$
d. $5y = 7$
e. $-x - 5y = 1$

16.2

a. $2x - 7y = -2$
b. $x = 3y - 2$
c. $-5x + 2y = -3$
d. $2x - 11y = 0$
e. $x = 2y$

Bereken met je rekenmachine van de volgende lijnen in het vlak de hellingshoek in graden nauwkeurig:

16.3

a. $x - 3y = 2$
b. $-3x = -y + 7$
c. $4x + 3y = 1$
d. $y = 7x$
e. $x - 4y = 2$

16.4

a. $5x - 2y = 12$
b. $4x = y + 8$
c. $x - y = 3$
d. $12x + 11y = 12$
e. $3x = -y$

Bereken met je rekenmachine van de volgende lijnen in het vlak de hellingshoek in radialen in 2 decimalen nauwkeurig:

16.5

a. $x - 3y = 2$
b. $-3x = -y + 7$
c. $4x + 3y = 1$
d. $y = 7x$
e. $x - 4y = 2$

16.6

a. $5x - 2y = 12$
b. $4x = y + 8$
c. $x - y = 3$
d. $12x + 11y = 12$
e. $3x = -y$

Bepaal in de volgende opgaven de lineaire functie waarvan de grafiek de rechte lijn is door P met richtingscoëfficiënt m.

16.7

a. $P = (0, 0)$, $m = 3$
b. $P = (1, -1)$, $m = -2$
c. $P = (1, 2)$, $m = 0.13$
d. $P = (-1, 1)$, $m = -1$
e. $P = (2, -3)$, $m = 4$

16.8

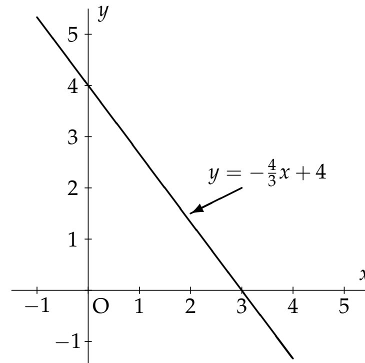
a. $P = (4, 0)$, $m = -4$
b. $P = (3, -4)$, $m = 2.22$
c. $P = (-1, -3)$, $m = 0$
d. $P = (1, -1)$, $m = -1.5$
e. $P = (-1, -2)$, $m = 0.4$

Eerstegraadsfuncties

De lineaire vergelijking $4x + 3y = 12$ kun je ook schrijven als

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

waarmee y als een functie van x gegeven is: bij iedere x levert het rechterlid $-\frac{4}{3}x + 4$ de bijbehorende waarde van y. De rechte lijn in het Oxy-vlak die door de vergelijking wordt voorgesteld, is de grafiek van die functie.



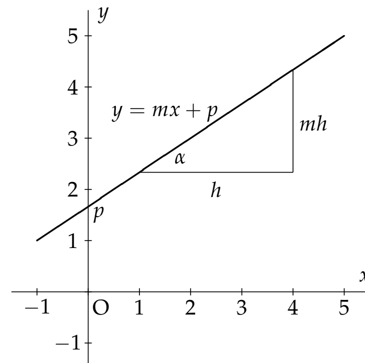
In het algemeen kun je elke lineaire vergelijking $ax + by = c$ waarvoor geldt dat $b \neq 0$ is, schrijven in de vorm

$$y = mx + p$$

(neem $m = -a/b$ en $p = c/b$). De voorwaarde $b \neq 0$ betekent dat de bijbehorende lijn in het Oxy-vlak niet verticaal is.

De functie $f(x) = mx + p$ heet een *eerstegraadsfunctie* van x. Omdat de grafiek ervan een rechte lijn is, spreekt men ook wel over een *lineaire* functie. De uitdrukking $mx + p$ is het functievoorschrift.

De coëfficiënt m van x heet de *richtingscoëfficiënt*. Bij een toename van h lengte-eenheden in de x-richting langs de grafiek hoort een toename van mh lengte-eenheden in de y-richting. Een positieve m hoort bij een stijgende grafiek, een negatieve m bij een dalende grafiek.
Als de schaaleenheden op de beide assen gelijk zijn gekozen, is m ook de *tangens* van de hoek α die de grafiek maakt met de richting van de x-as. Die hoek α heet de *hellingshoek*.



Bij hoekmeting in graden neemt men α tussen $-90°$ en $90°$, bij hoekmeting in radialen neemt men α tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Je kunt verder nog opmerken dat de grafiek van de functie $y = mx + p$ de y-as snijdt in het punt $(0, p)$ want bij $x = 0$ hoort $y = p$.

Bepaal de coördinaten (x_t, y_t) van de top van de volgende parabolen:

16.9
a. $y = x^2 - 1$
b. $y = -3x^2 + 7$
c. $y = (x+1)^2$
d. $y = -2(x-2)^2 + 1$
e. $y = x^2 + 2x$

16.10
a. $y = (x+3)^2 + 4$
b. $y = 2x^2 - 8x$
c. $y = -3x^2 + 7x + 2$
d. $y = -2(x-2)^2 + 1$
e. $y = 5x^2 + 20x - 6$

16.11
a. $y = x^2 + 2x - 3$
b. $y = x^2 - 2x - 3$
c. $y = x^2 + 2x - 8$
d. $y = 2x^2 + x - 1$
e. $y = 3x^2 - x - 2$

16.12
a. $y = -x^2 - 2x + 3$
b. $y = -x^2 + 4x - 3$
c. $y = -x^2 - x + 2$
d. $y = 2x^2 - 3x - 2$
e. $y = 3x^2 + 2x - 1$

Bepaal de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de parabool met de gegeven top T die ook nog door het gegeven punt P gaat.

16.13
a. $T = (0,0)$ en $P = (1,2)$
b. $T = (0,0)$ en $P = (-1,-2)$
c. $T = (0,0)$ en $P = (2,1)$
d. $T = (0,0)$ en $P = (2,-2)$
e. $T = (0,0)$ en $P = (-1,-5)$

16.14
a. $T = (0,1)$ en $P = (1,2)$
b. $T = (0,-1)$ en $P = (2,-2)$
c. $T = (0,-2)$ en $P = (-1,-5)$
d. $T = (3,0)$ en $P = (-1,-2)$
e. $T = (-2,0)$ en $P = (2,1)$

16.15
a. $T = (1,2)$ en $P = (2,3)$
b. $T = (-1,2)$ en $P = (1,6)$
c. $T = (2,-1)$ en $P = (1,1)$
d. $T = (0,3)$ en $P = (1,4)$
e. $T = (-3,0)$ en $P = (-2,3)$

16.16
a. $T = (0,0)$ en $P = (3,6)$
b. $T = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ en $P = (1, -\frac{1}{4})$
c. $T = (\frac{1}{3}, -1)$ en $P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{9})$
d. $T = (0, \frac{3}{2})$ en $P = (\frac{1}{2}, 2)$
e. $T = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ en $P = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$

Tweedegraadsfuncties en parabolen

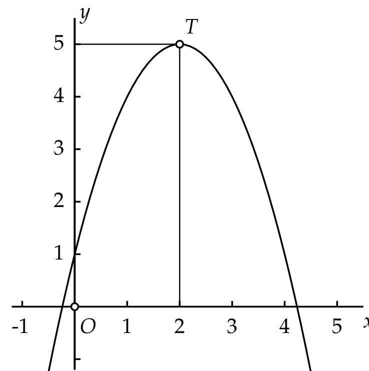
Het functievoorschrift

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

definieert een *tweedegraadsfunctie*, ook wel *kwadratische functie* genoemd.

De grafiek ervan is een *parabool*, in dit geval een *bergparabool* met zijn *top* in het punt $T = (2,5)$. We zien dat onmiddellijk wanneer we het functievoorschrift via kwadraatafsplitsen schrijven als

$$f(x) = -(x-2)^2 + 5.$$



Immers, de term $-(x-2)^2$ is altijd negatief of nul, en alleen maar nul wanneer $x = 2$ is. In dat geval is $f(x) = 5$ en de coördinaten (x_t, y_t) van de top T zijn dus $(x_t, y_t) = (2,5)$.

De parabool die de grafiek is van de functie $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ heeft als vergelijking $y = -x^2 + 4x + 1$. Alle punten (x, y) in het Oxy-vlak die aan deze vergelijking voldoen, liggen op de parabool en omgekeerd voldoen de coördinaten (x, y) van elk punt op de parabool ook aan deze vergelijking.

In het algemeen is $f(x) = ax^2 + bx + c$ het functievoorschrift van een tweedegraadsfunctie, mits natuurlijk $a \neq 0$ is. De grafiek ervan is een parabool met als vergelijking

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Het is een *dalparabool* wanneer $a > 0$ is, en een *bergparabool* wanneer $a < 0$ is (zoals in het voorbeeld hierboven).

Het laagste, respectievelijk hoogste punt van de parabool heet de *top* (ook bij een dalparabool!). De coördinaten (x_t, y_t) ervan bepaal je door net als in het voorbeeld hierboven eerst x_t te berekenen via kwadraatafsplitsen. Daarna kun je y_t via het functievoorschrift berekenen: $y_t = f(x_t)$.

De algemene vergelijking van een parabool met top (x_t, y_t) is

$$y = a(x - x_t)^2 + y_t.$$

De constante a kun je berekenen als je de coördinaten kent van nog één ander punt P op de parabool.

Teken de grafieken van de functies f en g in één figuur en bereken hun snijpunten.

16.17

a. $f(x) = x^2 + x - 2$
$g(x) = x + 2$

b. $f(x) = -x^2 - 2x - 1$
$g(x) = 2x + 3$

c. $f(x) = 2x^2 + x - 3$
$g(x) = -x - 3$

d. $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$
$g(x) = 2x - 1$

e. $f(x) = 3x^2 + x - 4$
$g(x) = -3x - 5$

16.18

a. $f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = -x^2 + 3$

b. $f(x) = x^2 + x - 2$
$g(x) = x^2 + 2x - 3$

c. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = -x^2 + 8x - 7$

d. $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$
$g(x) = x^2 + x + 1$

e. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = -x^2 + 2x - 5$

Voor welke reële getallen x geldt $f(x) \geq g(x)$?

16.19

a. $f(x) = x^2 + x - 3$
$g(x) = -1$

b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = -2x - 2$

c. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
$g(x) = x - 3$

d. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = 2x + 2$

e. $f(x) = -3x^2 + x + 2$
$g(x) = -x + 2$

16.20

a. $f(x) = x^2 + x - 3$
$g(x) = -x^2 + 3x - 3$

b. $f(x) = x^2 - x - 2$
$g(x) = 2x^2 - 3x - 4$

c. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
$g(x) = x^2 - 3x + 2$

d. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = -x^2 + x + 4$

e. $f(x) = -3x^2 + x + 2$
$g(x) = 2x^2 - 5x - 6$

16.21 Voor welke reële getallen p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x-as?

a. $f(x) = x^2 + px + 1$

b. $f(x) = x^2 - x + p$

c. $f(x) = px^2 + 2x - 1$

d. $f(x) = x^2 + px + p$

e. $f(x) = -x^2 + px + p - 3$

16.22 Voor welke reële getallen p raakt de grafiek van de gegeven functie f aan de x-as?

a. $f(x) = x^2 + 2px - 1$

b. $f(x) = -x^2 + x + p + 1$

c. $f(x) = px^2 + 2x - 3$

d. $f(x) = x^2 + px + p + 3$

e. $f(x) = (p + 1)x^2 - px - 1$

Snijpunten van grafieken

Stel dat gegeven zijn de tweedegraadsfuncties

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

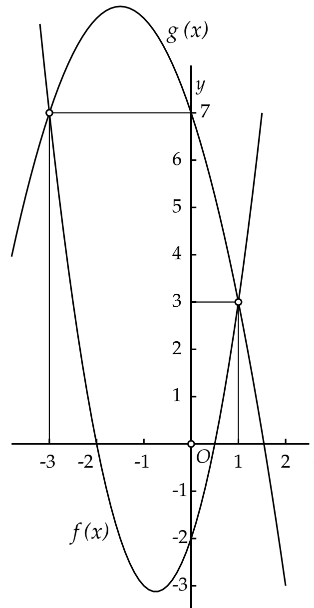
en

$$g(x) = -x^2 - 3x + 7.$$

Voor de x-coördinaat van een snijpunt van hun grafieken geldt $f(x) = g(x)$, dus

$$2x^2 + 3x - 2 = -x^2 - 3x + 7$$

oftewel $3x^2 + 6x - 9 = 0$. De oplossingen hiervan zijn $x = 1$ en $x = -3$. Omdat $f(1) = g(1) = 3$ en $f(-3) = g(-3) = 7$ zijn de coördinaten van snijpunten van de twee parabolen dus $(1, 3)$ en $(-3, 7)$.
Uit de grafieken lezen we verder af dat $f(x) \leq g(x)$ wanneer $-3 \leq x \leq 1$ en dat $f(x) \geq g(x)$ wanneer $x \leq -3$ of $x \geq 1$.



De methode is algemeen bruikbaar. Als je voor twee verschillende functies f en g de eventuele snijpunten van hun grafieken zoekt, los je de vergelijking $f(x) = g(x)$ op om de x-coördinaten van de snijpunten te vinden. Invullen van een gevonden x-coördinaat in een van de beide functievoorschriften geeft dan de bijbehorende y-coördinaat.

Wanneer de beide functies tweedegraadsfuncties zijn, is de vergelijking die je oplost een tweedegraadsvergelijking (of eventueel een eerstegraadsvergelijking), en dan zijn er dus hoogstens twee snijpunten.

Hetzelfde geldt voor het geval dat een van de twee functies een eerstegraadsfunctie, en de andere een tweedegraadsfunctie is.

Teken de grafieken van de volgende functies. Bepaal daarbij in het bijzonder de horizontale en de verticale asymptoot en de eventuele snijpunten van de grafiek met de beide coördinaatassen.

16.23

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{2x-4}$

d. $f(x) = \dfrac{2x}{x-5}$

e. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

16.24

a. $f(x) = \dfrac{-x}{2x-3}$

b. $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-1}$

c. $f(x) = \dfrac{2x-4}{1-5x}$

d. $f(x) = \dfrac{x+3}{4+7x}$

e. $f(x) = \dfrac{3-2x}{4x-2}$

Bepaal met behulp van de grafiek van f voor welke reële getallen x geldt dat $-1 \leq f(x) \leq 1$.

16.25

a. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

c. $f(x) = \dfrac{5}{x-5}$

d. $f(x) = \dfrac{2x}{3-2x}$

e. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+2}$

16.26

a. $f(x) = \dfrac{2-x}{2x-1}$

b. $f(x) = \dfrac{2x-2}{3x+4}$

c. $f(x) = \dfrac{-x+7}{1-3x}$

d. $f(x) = \dfrac{2x+2}{4-5x}$

e. $f(x) = \dfrac{3-x}{2x+4}$

Bereken de snijpunten van de grafieken van de volgende functies f en g.

16.27

a. $f(x) = \dfrac{8}{x+3}$ en $g(x) = 2x$

b. $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$ en $g(x) = 2-x$

c. $f(x) = \dfrac{8}{5-x}$ en $g(x) = x+4$

d. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3-2x}$ en $g(x) = 3-2x$

16.28

a. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$ en $g(x) = 3x-5$

b. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ en $g(x) = x+2$

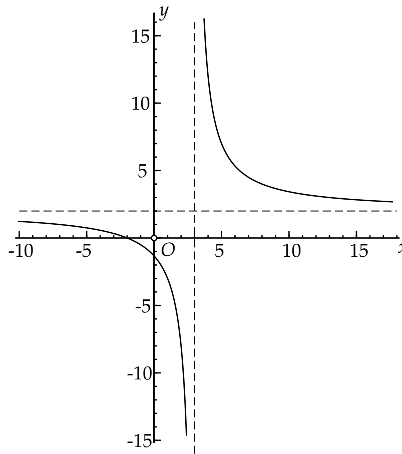
c. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ en $g(x) = 2-x$

d. $f(x) = \dfrac{2+2x}{2x-4}$ en $g(x) = 3x-5$

Gebroken lineaire functies

De functie

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$$



waarvan het functievoorschrift een 'breuk' is met een lineaire functie in de teller en een lineaire functie in de noemer, heet een *gebroken lineaire functie*. Voor $x = 3$ wordt de noemer nul, en dan kan $f(x)$ dus niet berekend worden. De grafiek van f heeft de verticale lijn $x = 3$ als *asymptoot*. Nadert x van boven tot 3, dan nadert $f(x)$ tot $+\infty$, nadert x van onder tot 3, dan nadert $f(x)$ tot $-\infty$.

Wanneer we in het functievoorschrift teller en noemer delen door x, ontstaat

$$f(x) = \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}}.$$

Voor zeer grote positieve of negatieve waarden van x zijn $\frac{4}{x}$ en $\frac{3}{x}$ zeer kleine getallen, en dan is $f(x)$ dus vrijwel gelijk aan $\frac{2}{1} = 2$. De horizontale lijn $y = 2$ is daarom een *horizontale asymptoot* van de grafiek van f.

De algemene vorm van een gebroken lineaire functie is

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

waarbij we aannemen dat $c \neq 0$ (want anders is het een 'gewone' lineaire functie). Zo'n functie is niet gedefinieerd wanneer de noemer nul wordt, dus als $x = -\frac{d}{c}$. De verticale lijn $x = -\frac{d}{c}$ is de verticale asymptoot van de grafiek[1].

De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot die wordt gegeven door de vergelijking $y = \frac{a}{c}$.

---

[1]Tenzij de teller voor die waarde van x ook nul is. In dat uitzonderingsgeval is $-d/c = -b/a$. Als we dat getal even p noemen, geldt dus $d = -cp$ en $b = -ap$. Voor alle $x \neq p$ is dan $f(x) = (ax+b)/(cx+d) = (ax-ap)/(cx-cp) = (a(x-p))/(c(x-p)) = a/c$. Buiten $x = p$ is f dan een constante functie. Dit uitzonderingsgeval treedt dus op als $-d/c = -b/a$, dat wil zeggen als $ad = bc$.

Teken de grafieken van de volgende functies. Werk de haakjes niet uit!

16.29

a. $f(x) = (x-1)^3$

b. $f(x) = x^3 - 1$

c. $f(x) = 1 - x^4$

d. $f(x) = 1 + (x+1)^3$

e. $f(x) = (2x-1)^3$

16.30

a. $f(x) = \sqrt{x-1}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

c. $f(x) = 1 - \sqrt[4]{2-x}$

d. $f(x) = \sqrt[3]{4+7x}$

e. $f(x) = \sqrt[5]{x-2}$

16.31

a. $f(x) = \sqrt{x^3}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

c. $f(x) = \sqrt{|x|}$

d. $f(x) = \sqrt{|x|^3}$

e. $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$

16.32

a. $f(x) = |x|^3$

b. $f(x) = |x-1|^3$

c. $f(x) = |1-x^2|$

d. $f(x) = |1+x^3|$

e. $f(x) = |1-(x+1)^2|$

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden op. Maak daarbij steeds gebruik van een tekening.

16.33

a. $x^4 \leq x^3$

b. $x^4 = |x|$

c. $x^4 \geq |x|^3$

d. $x^4 \geq \sqrt{x}$

e. $x^4 \leq |\sqrt[3]{x}|$

16.34

a. $\sqrt{x} = |x|$

b. $\sqrt{x-1} = |x-2|$

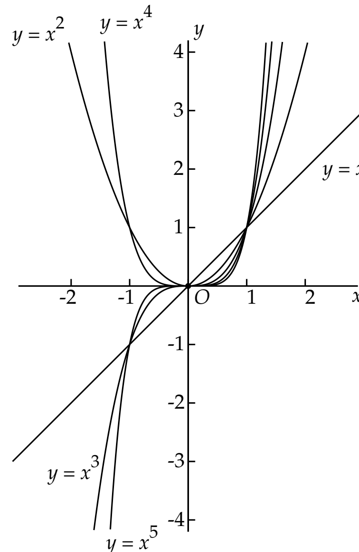
c. $\sqrt{x+1} \leq x-1$

d. $\sqrt{|1-x|} \geq x$

e. $\sqrt{2x+1} \leq |x+1|$

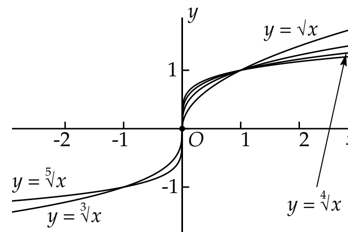
Machtsfuncties, wortelfuncties en de absolute-waardefunctie

Hiernaast zijn in één figuur de grafieken getekend van de *machtsfuncties* $f(x) = x^n$ voor $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Allemaal gaan ze door de oorsprong en door het punt $(1, 1)$.
Voor alle $n > 1$ raken die grafieken de x-as in de oorsprong. Voor even waarden van n nemen de functies daar hun minimale waarde aan. Voor oneven $n \geq 3$ heeft de grafiek in de oorsprong een buigpunt.
Voor even waarden van n zijn de grafieken symmetrisch om de y-as. Er geldt dan $f(-x) = f(x)$ voor alle x. Voor oneven n zijn de grafieken puntsymmetrisch in de oorsprong. Er geldt dan $f(-x) = -f(x)$.

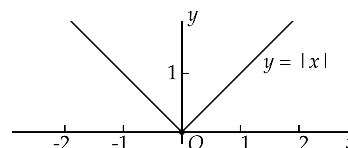


In het algemeen noemt men een functie $f(x)$ *even* als voor alle x geldt dat $f(-x) = f(x)$, en *oneven* als voor alle x geldt dat $f(-x) = -f(x)$. Maar let op: niet iedere functie is even of oneven. De meeste functies zijn geen van beide, neem bijvoorbeeld de functie $f(x) = x + 1$, die even noch oneven is.

In de tekening hiernaast staan de grafieken van de *wortelfuncties* $f(x) = \sqrt[n]{x}$ voor $n = 2, 3, 4, 5$. Allemaal gaan ze door de oorsprong en door het punt $(1, 1)$. Voor even waarden van n zijn die functies alleen maar gedefinieerd voor $x \geq 0$, voor oneven n zijn ze gedefinieerd voor alle x. Al die grafieken raken de y-as in de oorsprong.



In de onderste tekening is de grafiek getekend van de *absolute-waardefunctie* $f(x) = |x|$, die gedefinieerd is door $|x| = x$ als $x \geq 0$ en $|x| = -x$ als $x \leq 0$.



Merk op dat $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ als n even is, en $\sqrt[n]{x^n} = x$ als n oneven is.

16.35 Geef voorbeelden van

a. een vijfdegraadspolynoom met vijf verschillende nulpunten,
b. een vijfdegraadspolynoom met vier verschillende nulpunten,
c. een vijfdegraadspolynoom met drie verschillende nulpunten,
d. een vijfdegraadspolynoom met twee verschillende nulpunten,
e. een vijfdegraadspolynoom met één nulpunt,
f. een zesdegraadspolynoom zonder nulpunten.

16.36 Bepaal bij het gegeven polynoom $f(x)$ en het gegeven getal a een polynoom $g(x)$ en een getal b zo, dat $f(x) = (x-a)g(x) + b$. Ga telkens na dat $b = f(a)$.

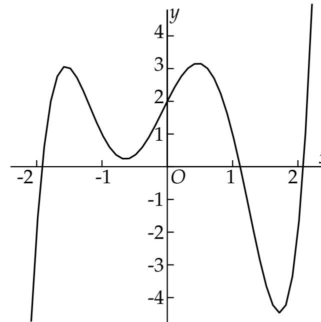
a. $f(x) = 2x^2 + 3, \quad a = 1$
b. $f(x) = x^2 - x + 2, \quad a = 2$
c. $f(x) = -2x^2 - 4x + 6, \quad a = -1$
d. $f(x) = x^3 + 2, \quad a = 1$
e. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \quad a = 0$
f. $f(x) = 2x^3 - 4x + 2, \quad a = -2$
g. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2, \quad a = 1$
h. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 6x^2, \quad a = -1$
i. $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6, \quad a = 1$
j. $f(x) = x^7, \quad a = -1$

16.37 Ga na dat a een nulpunt van het polynoom $f(x)$ is en bepaal vervolgens een polynoom $g(x)$ zo, dat $f(x) = (x-a)g(x)$.

a. $f(x) = 2x^4 - 2, \quad a = 1$
b. $f(x) = x^3 + x^2 + 4, \quad a = -2$
c. $f(x) = x^3 + 1, \quad a = -1$
d. $f(x) = x^4 - 16, \quad a = 2$
e. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad a = 1$
f. $f(x) = 2x^3 - 4x + 8, \quad a = -2$

Polynomen

Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$. De schaalverdelingen op de assen zijn verschillend gekozen.



Je ziet drie *nulpunten* van deze functie, dat wil zeggen punten x waarvoor $f(x) = 0$ is. Of $f(x)$ nog meer nulpunten heeft, kun je zo direct niet zien: misschien liggen er verderop naar links of naar rechts wel meer. Nader onderzoek zou dat kunnen uitwijzen.

In het algemeen heet elke functie van de vorm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

een *polynoomfunctie*, of, kortweg, een *polynoom*. Ook het Nederlandse woord *veelterm* wordt hiervoor wel gebruikt. De getallen a_i heten de *coëfficiënten*. We veronderstellen daarbij altijd dat de hoogste coëfficiënt a_n niet nul is (anders zou je die term net zo goed weg kunnen laten). De andere coëfficiënten mogen wel nul zijn. Men noemt n de *graad* van het polynoom. Het hierboven gegeven voorbeeld is dus een vijfdegraadspolynoom.

Van belang is de *factorstelling*:

> *Als $f(x)$ een n-degraads polynoom is met $n \geq 1$ en a is een reëel getal, dan is er een polynoom $g(x)$ van graad $n-1$ zo, dat $f(x) = (x-a)g(x) + f(a)$.*

Neem als voorbeeld het vijfdegraadspolynoom $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$ van hierboven en $a = 1$. Dan is $f(x) = (x-1)(x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 1) + 1$ zoals je gemakkelijk kunt nagaan. Merk ook op dat inderdaad $f(1) = 1$.

Als a een nulpunt van $f(x)$ is, is $f(a) = 0$ zodat $f(x) = (x-a)g(x)$. Als $g(x)$ een nulpunt heeft, kun je daar ook weer zo'n eerstegraads factor uit halen, enzovoorts, net zo lang totdat er een polynoom zonder nulpunten overblijft. Elk polynoom $f(x)$ is dus te schrijven als

$$f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_k) h(x)$$

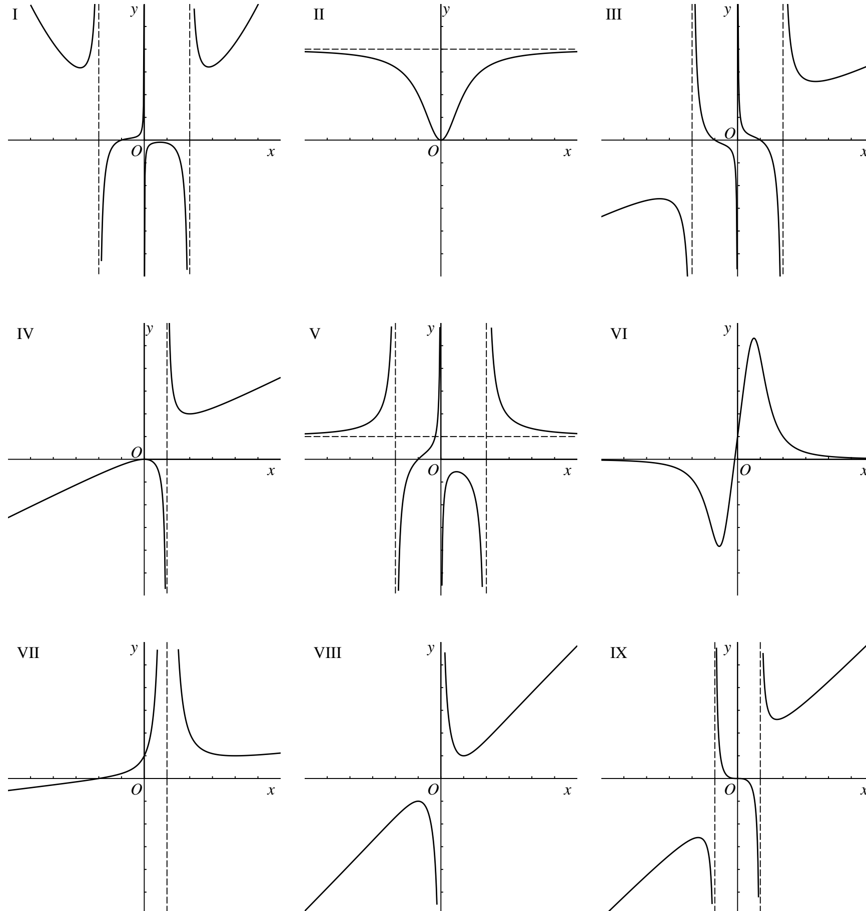
waarbij $h(x)$ een polynoom zonder nulpunten is. Gevolg:

> *Elk n-degraads polynoom met $n \geq 1$ heeft hoogstens n nulpunten.*

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende stelling:

> *Elk n-degraads polynoom met n oneven heeft minstens één nulpunt.*

16.38 Zoek bij elke grafiek het bijpassende functievoorschrift. Motiveer je antwoord. Gebruik geen grafische rekenmachine.



a. $\dfrac{x^4+1}{x^3+x}$ b. $\dfrac{x^3+1}{x^3-4x}$ c. $\dfrac{4x^2}{x^2+1}$

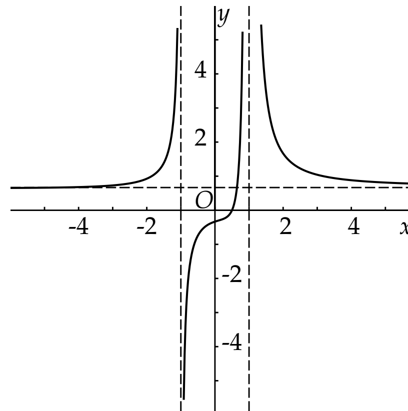
d. $\dfrac{x^4-1}{2x^3-8x}$ e. $\dfrac{x^5+1}{5x^3-20x}$ f. $\dfrac{x^2}{2x-2}$

g. $\dfrac{x^3+8}{8(x-1)^2}$ h. $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ i. $\dfrac{8x+1}{x^4+1}$

Rationale functies

Hiernaast is de grafiek getekend van de functie

$$f(x) = \frac{(x^2+1)(2x-1)}{3(x-1)^2(x+1)}.$$



Je ziet twee verticale en een horizontale asymptoot. De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $x = -1$, precies bij de waarden van x waarvoor de noemer nul wordt. De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{2}{3}$. De horizontale asymptoot geeft de limietwaarde van $f(x)$ als $x \longrightarrow +\infty$ en als $x \longrightarrow -\infty$.

Je vindt die limieten het gemakkelijkst als je $f(x)$ schrijft als

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^3 - 3x^2 - 3x + 3} = \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{3 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}}$$

dus haakjes uitwerken en teller en noemer delen door de hoogste macht van x. Het enige nulpunt van de functie is het punt waar de teller nul wordt, en dat is als $x = \frac{1}{2}$.

Men noemt in het algemeen iedere functie waarvan het functievoorschrift geschreven kan worden als het quotiënt van twee polynomen een *rationale functie*. Zo'n functie is dus van de gedaante

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

We kunnen daarbij aannemen dat het tellerpolynoom $a(x)$ en het noemerpolynoom $b(x)$ geen gemeenschappelijke nulpunten hebben, want die kunnen we via de factorstelling wegdelen.

De nulpunten van de teller $a(x)$ zijn ook de nulpunten van $f(x)$. De nulpunten van de noemer $b(x)$ heten de *polen* van de functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Een horizontale asymptoot treedt alleen maar op als $n \leq m$. Als $n = m$ is de lijn $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ de horizontale asymptoot. Dit geval deed zich voor in het hierboven getekende voorbeeld: daar was $a_3 = 2$ en $b_3 = 3$. Als $n < m$ is de x-as de horizontale asymptoot. De limiet van $f(x)$ voor $x \longrightarrow \pm\infty$ is dan nul.

17. Goniometrie

Bereken de grootte van de volgende in graden gegeven hoeken in radialen. Geef exacte antwoorden!

17.1

a. $30°$
b. $45°$
c. $60°$
d. $70°$
e. $15°$

17.2

a. $20°$
b. $50°$
c. $80°$
d. $100°$
e. $150°$

17.3

a. $130°$
b. $135°$
c. $200°$
d. $240°$
e. $330°$

Bereken de grootte van de volgende in radialen gegeven hoeken in graden. Geef exacte antwoorden!

17.4

a. $\frac{1}{6}\pi$
b. $\frac{7}{6}\pi$
c. $\frac{1}{3}\pi$
d. $\frac{2}{3}\pi$
e. $\frac{1}{4}\pi$

17.5

a. $\frac{5}{4}\pi$
b. $\frac{5}{12}\pi$
c. $\frac{11}{24}\pi$
d. $\frac{15}{8}\pi$
e. $\frac{23}{12}\pi$

17.6

a. $\frac{71}{72}\pi$
b. $\frac{41}{24}\pi$
c. $\frac{25}{18}\pi$
d. $\frac{13}{24}\pi$
e. $\frac{31}{36}\pi$

Bereken bij de volgende draaiingshoeken de hoek α met $0 \leq \alpha < 360°$ die hetzelfde draaiingsresultaat geeft.

17.7

a. $-30°$
b. $445°$
c. $-160°$
d. $700°$
e. $515°$

17.8

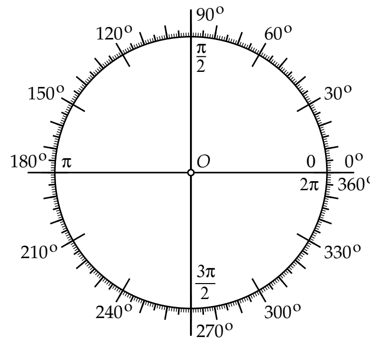
a. $-220°$
b. $-650°$
c. $830°$
d. $1000°$
e. $1550°$

17.9

a. $-430°$
b. $935°$
c. $1200°$
d. $-240°$
e. $730°$

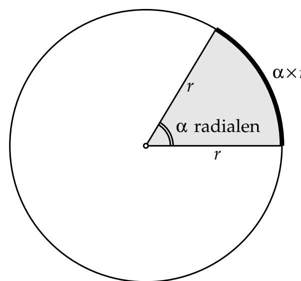
Hoekmeting

Hoeken meten we in *graden* of in *radialen*. Hiernaast zie je de eenheidscirkel in het vlak (de cirkel met straal 1 en de oorsprong O als middelpunt) waarop de beide verdelingen zijn aangegeven. Een volledige rondgang telt 360 graden, oftewel 2π radialen.
Ook draaiingshoeken kunnen we in graden of in radialen meten. De *draaiingsrichting* is dan wel van belang: volgens afspraak geven we draaiingen in het vlak tegen de klok in met een plusteken aan, en draaiingen met de klok mee met een minteken.



Bij draaiingen kan de draaiingshoek natuurlijk ook groter dan 360° zijn. Voor het resultaat maakt het niets uit of je er gehele veelvouden van 360° (of 2π radialen) bij optelt of van aftrekt.

De term *radiaal* komt van *radius*, hetgeen straal betekent. Wanneer je op een cirkel met straal r een boog tekent die vanuit het middelpunt onder een hoek van α radialen wordt gezien, is de lengte van die boog precies $\alpha \times r$. De hoekmaat in radialen geeft dus de verhouding tussen de booglengte en de straal, vandaar de naam radiaal. Bij een cirkel met straal $r = 1$ is de booglengte precies *gelijk* aan de middelpuntshoek α in radialen.



De omtrek van een cirkel met een straal r is $2\pi r$. Bij een volledige rondgang langs een cirkel hoort dan ook een draaiingshoek van 2π radialen. Een hoek van 1 radiaal is iets kleiner dan 60 graden, namelijk, in acht decimalen nauwkeurig, 57.29577950 graden. De exacte waarde is $360/(2\pi)$.

De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2, en de oppervlakte van een sector met een middelpuntshoek van α radialen is daarom $\dfrac{\alpha}{2\pi} \times \pi r^2 = \dfrac{1}{2}\alpha r^2$.

Gebruik de tabel op de volgende bladzijde en geschikt gekozen symmetrieën van de eenheidscirkel om de volgende sinussen, cosinussen en tangenten te berekenen. Geef exacte antwoorden!

17.10
a. $\sin \frac{2}{3}\pi$
b. $\cos \frac{3}{4}\pi$
c. $\cos \frac{11}{6}\pi$
d. $\tan \frac{5}{4}\pi$
e. $\sin \frac{5}{6}\pi$

17.11
a. $\sin 3\pi$
b. $\tan 7\pi$
c. $\cos -5\pi$
d. $\tan 12\pi$
e. $\sin -5\pi$

17.12
a. $\sin -\frac{2}{3}\pi$
b. $\tan \frac{7}{4}\pi$
c. $\cos -\frac{7}{6}\pi$
d. $\tan -\frac{5}{3}\pi$
e. $\sin \frac{13}{4}\pi$

17.13
a. $\tan \frac{4}{3}\pi$
b. $\sin -\frac{3}{4}\pi$
c. $\cos \frac{11}{3}\pi$
d. $\tan -\frac{15}{4}\pi$
e. $\cos -\frac{23}{6}\pi$

17.14
a. $\cos 13\pi$
b. $\tan 17\pi$
c. $\sin -7\pi$
d. $\tan 11\pi$
e. $\cos -8\pi$

17.15
a. $\sin \frac{23}{6}\pi$
b. $\tan -\frac{17}{4}\pi$
c. $\sin -\frac{7}{3}\pi$
d. $\tan -\frac{25}{6}\pi$
e. $\sin \frac{23}{4}\pi$

Alle oplossingen van de vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}$ kunnen geschreven worden als $x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of als $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ voor een gehele waarde van k. Geef op een dergelijke wijze alle oplossingen van de volgende vergelijkingen.

17.16
a. $\sin x = -\frac{1}{2}$
b. $\cos x = \frac{1}{2}$
c. $\tan x = -1$

17.17
a. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
b. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
c. $\tan x = -\sqrt{3}$

17.18
a. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
b. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c. $\cos x = 0$

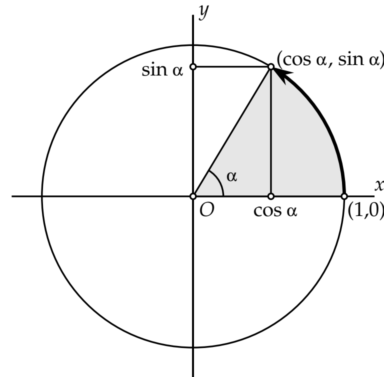
In de volgende opgaven is van een hoek α met $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ de sinus of de cosinus gegeven. Bereken de cosinus respectievelijk de sinus van α. Geef exacte antwoorden!

17.19
a. $\sin \alpha = \frac{1}{5}$
b. $\cos \alpha = \frac{2}{7}$
c. $\sin \alpha = \frac{3}{8}$
d. $\cos \alpha = \frac{2}{5}$
e. $\cos \alpha = \frac{5}{7}$

17.20
a. $\sin \alpha = \frac{3}{4}$
b. $\cos \alpha = \frac{1}{6}$
c. $\sin \alpha = \frac{1}{8}$
d. $\cos \alpha = \frac{5}{8}$
e. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

17.21
a. $\sin \alpha = \frac{6}{31}$
b. $\cos \alpha = \frac{4}{23}$
c. $\sin \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{5}$
d. $\cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{7}$
e. $\cos \alpha = \frac{1}{4}\sqrt{10}$

De sinus, de cosinus en de tangens



Bij elke draaiingshoek α hoort een draaiing in het vlak om de oorsprong over die hoek. Een positieve draaiingshoek correspondeert met een draaiing tegen de klok in, een negatieve hoek hoort bij een draaiing met de klok mee. We kunnen zo'n draaiing aangeven via een boog van de eenheidscirkel met middelpuntshoek α die in $(1, 0)$ begint. De coördinaten (x, y) van het eindpunt zijn dan respectievelijk de *cosinus* en de *sinus* van α, dus $x = \cos\alpha$ en $y = \sin\alpha$.

Omdat (x, y) op de eenheidscirkel ligt, geldt $x^2 + y^2 = 1$, dus

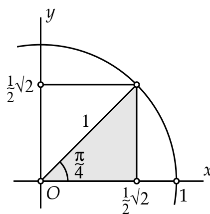
$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.}$$

Let hierbij op de notatie: $\cos^2\alpha$ betekent $(\cos\alpha)^2$ en $\sin^2\alpha$ betekent $(\sin\alpha)^2$. Deze notatievormen zijn algemeen gebruikelijk. Echter: $\cos\alpha^2$ betekent $\cos(\alpha^2)$. Ook hier geldt weer: zet bij twijfel haakjes!

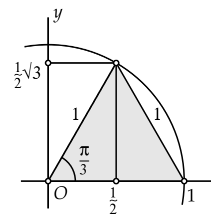
De *tangens* van α is het quotiënt van de sinus en de cosinus, in formule:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.}$$

Er zijn enige hoeken α met bijzondere waarden voor de sinus, de cosinus en de tangens. Voor $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ (in radialen) geven we ze in de vorm van een tabel. Uit de beide tekeningen kun je die waarden afleiden. Bedenk daarbij dat de linkerdriehoek de vorm heeft van een 'geodriehoek' (met zijden van lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en 1) en dat de rechterdriehoek gelijkzijdig is (met zijden van lengte 1).



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$



Schets de grafiek van de volgende functies. Een ruwe schets is voldoende. Geef wel altijd de periodelengte aan alsmede de snijpunten van de grafiek met de de x-as.

17.22
a. $\sin(-x)$
b. $\cos(-x)$
c. $\tan(-x)$
d. $\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$
e. $\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$

17.23
a. $\tan(x + \frac{1}{2}\pi)$
b. $\cos(x - \frac{1}{6}\pi)$
c. $\sin(x + \frac{2}{3}\pi)$
d. $\cos(x - \frac{5}{4}\pi)$
e. $\tan(x - \frac{1}{3}\pi)$

17.24
a. $\tan(x + \frac{1}{6}\pi)$
b. $\cos(x - 3\pi)$
c. $\sin(x + \frac{20}{3}\pi)$
d. $\cos(x - \frac{15}{4}\pi)$
e. $\tan(x - \frac{17}{6}\pi)$

17.25
a. $\sin(\frac{3}{2}\pi - x)$
b. $\cos(\frac{1}{4}\pi + x)$
c. $\tan(\frac{2}{3}\pi - x)$
d. $\cos(\frac{5}{3}\pi + x)$
e. $\sin(\frac{1}{3}\pi - x)$

17.26
a. $\tan(2x)$
b. $\cos(3x)$
c. $\sin(\frac{2}{3}x)$
d. $\cos(\frac{5}{4}x)$
e. $\tan(8x)$

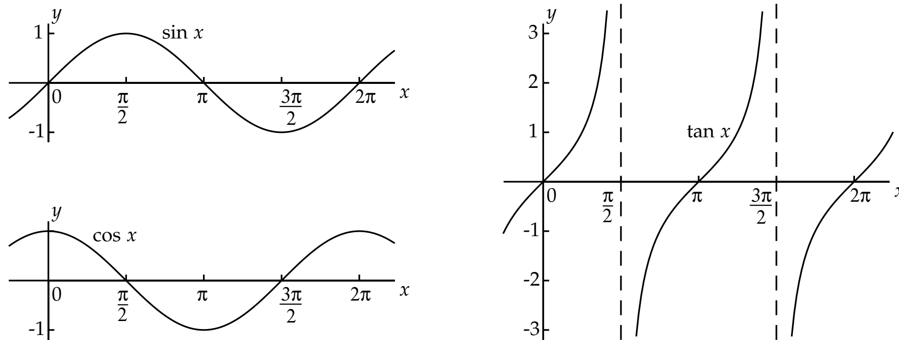
17.27
a. $\tan(3x + \frac{1}{6}\pi)$
b. $\cos(2x - 3\pi)$
c. $\sin(2x + \frac{20}{3}\pi)$
d. $\cos(\frac{1}{2}x - \frac{15}{4}\pi)$
e. $\tan(\frac{1}{3}x - \frac{17}{6}\pi)$

17.28
a. $\sin(2\pi x)$
b. $\cos(3\pi x)$
c. $\tan(\pi x)$
d. $\cos(2\pi x + \frac{1}{2}\pi)$
e. $\sin(2\pi x - \frac{1}{3}\pi)$

17.29
a. $\tan(6\pi x + \pi)$
b. $\cos(4\pi x - 7\pi)$
c. $\sin(2\pi x + \frac{2}{3}\pi)$
d. $\cos(\frac{5}{4}\pi x - \pi)$
e. $\tan(\frac{1}{3}\pi x + 2\pi)$

17.30
a. $\tan(\pi x + \frac{1}{6}\pi)$
b. $\cos(\frac{1}{2}\pi x - 3\pi)$
c. $\sin(7\pi x + \frac{2}{3}\pi)$
d. $\cos(5\pi x - \frac{5}{4}\pi)$
e. $\tan(\frac{3}{4}\pi x - \frac{7}{6}\pi)$

Grafieken van goniometrische functies

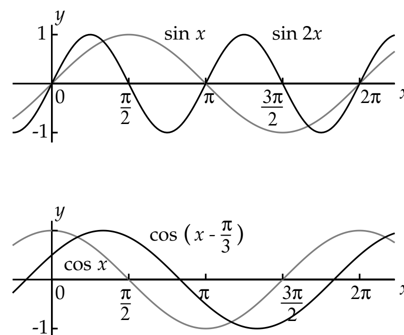


Hierboven zijn de grafieken getekend van de functies $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$, met x in radialen. Die functies zijn *periodiek*: de sinus en de cosinus met periode 2π, de tangens met periode π. De tangens heeft verticale asymptoten voor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ met k geheel, want voor die waarden van x is de cosinus nul, en dan is $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$ dus niet gedefinieerd.

Uit de definitie van de sinus, de cosinus en de tangens met behulp van de eenheidscirkel (zie bladzijde 137) volgen direct de volgende eigenschappen, die je ook in de grafieken terugziet:

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x,} \qquad \boxed{\cos(-x) = \cos x,} \qquad \boxed{\tan(-x) = -\tan x.}$$

Hiernaast staan voorbeelden getekend van twee veelgebruikte transformaties. In de bovenste figuur vind je behalve de grafiek van de functie $\sin x$ ook die van $\sin 2x$. De sinusgrafiek is in horizontale richting als het ware met een factor 2 samengedrukt. De periode is twee maal zo klein geworden: π in plaats van 2π.
De onderste tekening toont naast de grafiek van $\cos x$ ook die van de functie $\cos(x - \frac{\pi}{3})$. De cosinusgrafiek is nu in horizontale richting over een afstand van $\frac{\pi}{3}$ naar rechts verschoven.



17.31 Leid de volgende formules af. Je kunt daarbij gebruik maken van de formules op bladzijde 137 en de optelformules van de volgende bladzijde.

a. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

b. $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

c. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

d. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

17.32 Bewijs dat $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ en $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ voor alle x.

17.33 Gebruik de relaties $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ en $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$ om de volgende formules af te leiden.

a. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

b. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

c. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

d. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

De dubbele-hoekformules $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ (zie boven) kun je ook gebruiken om $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ te berekenen als je $\cos 2\alpha$ kent:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)} \qquad \text{en} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)}.$$

Gebruik dit, en eventueel ook de optelformules, bij de volgende opgaven.

17.34 Bereken exact:

a. $\sin\frac{1}{8}\pi$

b. $\cos\frac{1}{8}\pi$

c. $\tan\frac{1}{8}\pi$

d. $\sin\frac{1}{12}\pi$

e. $\cos\frac{1}{12}\pi$

17.35 Bereken exact:

a. $\sin\frac{3}{8}\pi$

b. $\cos\frac{7}{8}\pi$

c. $\tan\frac{5}{8}\pi$

d. $\sin\frac{7}{12}\pi$

e. $\tan\frac{7}{12}\pi$

17.36 Bereken exact:

a. $\sin\frac{11}{8}\pi$

b. $\cos\frac{17}{12}\pi$

c. $\tan\frac{15}{8}\pi$

d. $\tan\frac{13}{12}\pi$

e. $\cos\frac{13}{8}\pi$

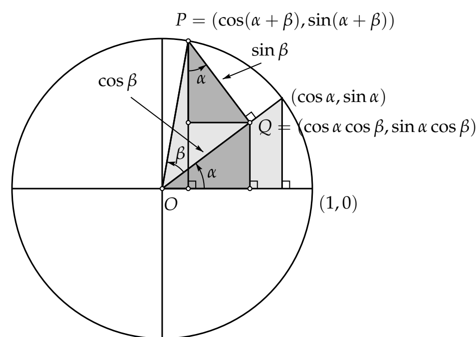
Optelformules en dubbele-hoekformules

Naast de basisformule $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ en de 'symmetrieformules' van bladzijde 139 zijn er nog twee andere fundamentele gonioformules:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$

Van deze twee formules geven we geen formele afleiding. Voor het geval dat α en β positief zijn met $\alpha + \beta < \frac{1}{2}\pi$ illustreren we de geldigheid ervan aan de hand van de onderstaande figuur.

De donkergrijze rechthoekige driehoeken daarin hebben allebei een scherpe hoek α. De schuine zijde OQ van de onderste driehoek heeft lengte $\cos\beta$, want OQ is ook een rechthoekszijde van de rechthoekige driehoek OQP met scherpe hoek β en schuine zijde $OP = 1$. Evenzo is $PQ = \sin\beta$.
Omdat de schuine zijde OQ van de onderste donkere driehoek lengte $\cos\beta$ heeft, zijn de lengten van de rechthoekszijden $\cos\alpha\cos\beta$ (horizontale zijde) en $\sin\alpha\cos\beta$ (verticale zijde).



Evenzo hebben de rechthoekszijden van de bovenste donkere driehoek een lengte van $\cos\alpha\sin\beta$ (verticale zijde) en $\sin\alpha\sin\beta$ (horizontale zijde). De x-coördinaat van het punt P is nu enerzijds gelijk aan $\cos(\alpha+\beta)$, want P hoort bij een draaiingshoek van $\alpha+\beta$, en anderzijds gelijk aan $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (het verschil van de horizontale rechthoekszijden van de donkere driehoeken). Dit levert de eerste optelformule. De tweede optelformule volgt op analoge wijze uit het feit dat de y-coördinaat van P de som is van de lengten van de verticale rechthoekszijden van de donkere driehoeken.

Door in de optelformules β te vervangen door $-\beta$ krijgen we

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$

Door in de optelformules $\alpha = \beta$ te nemen, ontstaan de *dubbele-hoekformules*:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

In de opgaven hiernaast vragen we je nog enige hieraan verwante formules af te leiden. Een volledig formuleoverzicht vind je op bladzijde 253.

Bereken exact:

17.37

a. $\arcsin -1$

b. $\arccos 0$

c. $\arctan -1$

d. $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e. $\arccos -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

17.38

a. $\arctan -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

b. $\arccos -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\arctan -\sqrt{3}$

e. $\arccos -1$

17.39

a. $\arctan(\tan \pi)$

b. $\arccos(\cos -\pi)$

c. $\arcsin(\sin 3\pi)$

d. $\arcsin(\sin \frac{2}{3}\pi)$

e. $\arctan(\tan \frac{5}{4}\pi)$

Bereken de exacte waarde van de volgende uitdrukkingen. Teken zo nodig als hulpfiguur een geschikt gekozen rechthoekige driehoek.

17.40

a. $\sin(\arcsin -\frac{5}{7})$

b. $\sin(\arccos 0)$

c. $\tan(\arctan \frac{3}{4})$

d. $\cos(\arctan 1)$

e. $\sin(\arctan -1)$

17.41

a. $\cos(\arcsin \frac{3}{5})$

b. $\sin(\arccos \frac{2}{3})$

c. $\cos(-\arctan \frac{3}{4})$

d. $\tan(\arcsin \frac{5}{7})$

e. $\sin(\arctan -4)$

17.42

a. $\arcsin(\cos \frac{1}{5}\pi)$

b. $\arccos(\sin \frac{3}{7}\pi)$

c. $\arcsin(\cos \frac{2}{3}\pi)$

d. $\arcsin(\cos \frac{7}{5}\pi)$

e. $\arctan(\tan \frac{9}{5}\pi)$

17.43 Stel $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$. Bereken exact:

a. $\sin 2\alpha$

b. $\tan \alpha$

c. $\sin 3\alpha$

d. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

e. $\cos \frac{1}{2}\alpha$

Schets de grafiek van de volgende functies. Een ruwe schets is voldoende. Let daarbij wel op snijpunten met de coördinaatassen en eventuele asymptoten.

17.44

a. $\arcsin x$

b. $\arccos x$

c. $\arctan x$

d. $\arcsin(-x)$

e. $\arccos(-x)$

17.45

a. $\arcsin 2x$

b. $\arccos \frac{1}{2}x$

c. $\arctan -3x$

d. $\arcsin(1-x)$

e. $\arccos(1+x)$

17.46

a. $\arctan(-3x+1)$

b. $\arcsin(1-2x)$

c. $\frac{1}{2}\pi + \arcsin x$

d. $\arctan(x^2)$

e. $\arctan \frac{1}{x}$

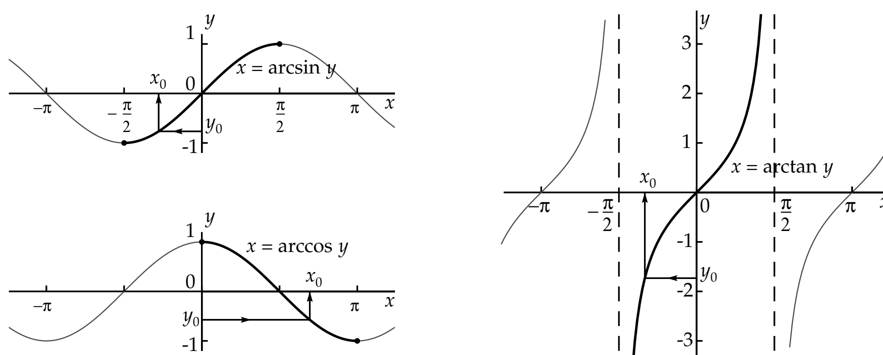
De arcsinus, de arccosinus en de arctangens

Wanneer we van een (in radialen gemeten) hoek x weten dat $\sin x = \frac{1}{2}$, dan zijn er voor x nog oneindig veel mogelijkheden open. De sinus is namelijk een periodieke functie, en bovendien wordt elke waarde (behalve 1 en -1) gedurende één periode twee maal aangenomen. Zo geldt $\sin x = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi$ en als $x = \frac{5}{6}\pi$ en bij elk van die hoeken kunnen we nog willekeurige gehele veelvouden van 2π optellen.

Al die keuzemogelijkheden verdwijnen echter wanneer we *afspreken* dat we x beperken tot het interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dat wil zeggen $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. In de figuur hieronder is het desbetreffende grafiekdeel dik gemaakt.

Voor de cosinus en de tangens, waarvoor soortgelijke problemen spelen, heeft men eveneens zulke voorkeursintervallen afgesproken: $[0, \pi]$ bij de cosinus, en $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ bij de tangens.

Wanneer er nu een waarde y_0 gegeven is, is er steeds precies één x_0 in het voorkeursinterval waarvoor respectievelijk geldt dat $\sin x_0 = y_0$, $\cos x_0 = y_0$ of $\tan x_0 = y_0$. In de figuur hieronder is aangegeven hoe je bij zo'n y_0 de bijbehorende x_0 vindt.



De bijbehorende functies heten respectievelijk de arcsinus, de arccosinus en de arctangens. Ze worden meestal afgekort tot arcsin, arccos en arctan. Je vindt ze ook op je rekenmachine, soms onder de namen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ en $\tan^{-1}$.

Er geldt dus:

$x = \arcsin y$	$\Longleftrightarrow$	$y = \sin x$	en	$-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$
$x = \arccos y$	$\Longleftrightarrow$	$y = \cos x$	en	$0 \leq x \leq \pi$
$x = \arctan y$	$\Longleftrightarrow$	$y = \tan x$	en	$-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$.

17.47 Teken in één figuur de grafieken van de functies $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ en $h(x) = -\frac{1}{x}$. Neem $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ en bepaal in het bijzonder de punten waar $f(x) = 0$ en waar de grafieken elkaar raken. Je hoeft de schaalverdelingen op de beide assen niet gelijk te nemen.

Bereken de volgende limieten met behulp van de standaardlimiet van de volgende bladzijde.

17.48

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x \cos x}$

e. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sin 3x}$

17.49

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 4x}{x \sin x}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

e. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x \tan 3x}$

Bereken de volgende limieten, bijvoorbeeld met behulp van een geschikt gekozen substitutie.

17.50

a. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

b. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{3x}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x}$

e. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

17.51

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan x}$

b. $\lim_{x \to -1} \frac{\sin 2\pi x}{\tan 3\pi x}$

c. $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$

d. $\lim_{x \to 1} \frac{\arctan(x - 1)}{x - 1}$

e. $\lim_{x \to -\infty} \cos \frac{1}{x}$

Een standaardlimiet

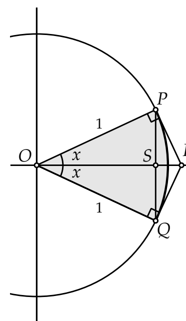
Een belangrijke limiet in toepassingen van de goniometrie is

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

die betekent dat voor kleine waarden van x het quotiënt $\dfrac{\sin x}{x}$ vrijwel gelijk is aan 1; hoe dichter x bij nul ligt, des te dichter ligt het quotiënt bij 1. Een andere manier om hetzelfde te zeggen, is dat $\sin x$ voor kleine hoeken x (gemeten in radialen!) vrijwel gelijk is aan x, dus dat $\sin x \approx x$ als x klein is. Je kunt dat ook zien in de grafiek van de sinus op bladzijde 139, die voor kleine waarden van x vrijwel samenvalt met de lijn $y = x$.

Een schetsmatige afleiding van die limiet vind je hieronder. Omdat geldt dat $\dfrac{\sin(-x)}{(-x)} = \dfrac{\sin x}{x}$ is het voldoende om daarbij alleen positieve waarden van x te bekijken.

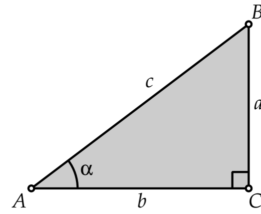
In de tekening zie je een sector OQP van de eenheidscirkel met een middelpuntshoek $2x$ waarin ook nog de koorde PQ en de raaklijnen PR en QR getekend zijn. Boog PQ heeft lengte $2x$. Verder geldt $PS = \sin x$ en $PR = \tan x$. Omdat de directe verbindingslijn PQ korter is dan de cirkelboog PQ, die op zijn beurt weer korter is dan de omweg $PR + RQ$, geldt $2\sin x < 2x < 2\tan x$. Uit de eerste ongelijkheid volgt $\frac{\sin x}{x} < 1$ en uit de tweede volgt $\frac{\sin x}{x} > \cos x$, want $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Combinatie van deze beide ongelijkheden geeft



$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Als x naar nul gaat, gaat $\cos x$ naar 1, en voor het quotiënt $\frac{\sin x}{x}$, dat opgesloten zit tussen $\cos x$ en 1, moet dus hetzelfde gelden. Hiermee is het bewijs geleverd.

In de volgende opgaven is van een rechthoekige driehoek ABC zoals die hiernaast getekend is, telkens de scherpe hoek α en een van de zijden gegeven. Bereken de andere twee zijden in vier decimalen nauwkeurig met behulp van een rekenmachine.

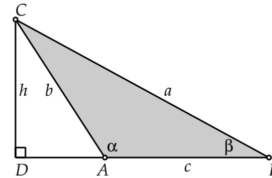


17.52
a. $\alpha = 32°, c = 3$
b. $\alpha = 63°, c = 2$
c. $\alpha = 46°, a = 2$
d. $\alpha = 85°, c = 7$
e. $\alpha = 12°, b = 3$

17.53
a. $\alpha = 23°, a = 3$
b. $\alpha = 49°, b = 2$
c. $\alpha = 76°, c = 8$
d. $\alpha = 21°, b = 2$
e. $\alpha = 17°, b = 4$

17.54
a. $\alpha = 1.1$ rad, $c = 3$
b. $\alpha = 0.5$ rad, $c = 4$
c. $\alpha = 0.2$ rad, $a = 2$
d. $\alpha = 1.2$ rad, $b = 7$
e. $\alpha = 0.7$ rad, $a = 3$

17.55 De hiernaast gegeven bewijzen van de sinusregel en de cosinusregel lijken alleen geldig te zijn voor een scherphoekige driehoek. Laat zien hoe je ze aan moet passen voor het geval dat $\alpha \geq \pi/2$ is. Hoe luiden de beide regels in het geval dat $\alpha = \pi/2$?

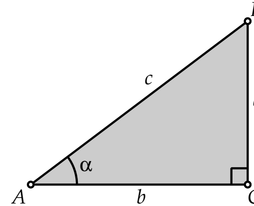


17.56 Hieronder zijn telkens enige zijden en/of hoeken van een driehoek gegeven. Bereken met behulp van je rekenmachine de gevraagde hoek of zijde en vervolgens ook de oppervlakte O van de driehoek. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig (geef hoeken in radialen).

a. $\alpha = 43°, \beta = 82°, a = 3$. Bereken b en O.
b. $\alpha = 113°, \beta = 43°, b = 2$. Bereken a en O.
c. $\alpha = 26°, \beta = 93°, a = 4$. Bereken c en O.
d. $\alpha = 76°, a = 5, c = 3$. Bereken γ en O.
e. $\beta = 36°, a = 2, b = 4$. Bereken α en O.
f. $\beta = 1.7$ rad, $a = 3, b = 4$. Bereken γ en O.
g. $a = 4, b = 5, c = 6$. Bereken γ en O.
h. $a = 5, b = 5, c = 6$. Bereken α en O.
i. $\beta = 0.75$ rad, $b = 6, c = 5$. Bereken a en O.
j. $\alpha = 71°, b = 2, c = 3$. Bereken a en O.
k. $\alpha = 58°, a = 6, b = 5$. Bereken c en O.

Driehoeksmeting

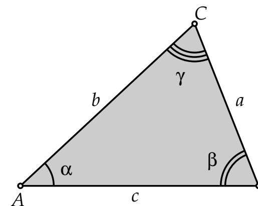
Als ABC een rechthoekige driehoek is met rechte hoek in C, scherpe hoek α bij A en zijden van lengte a, b en c tegenover respectievelijk A, B en C, dan gelden de volgende betrekkingen:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b},$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (\textit{stelling van Pythagoras}).$$

Als ABC een willekeurige driehoek met hoeken α, β en γ bij A, B en C, zijden van lengte a, b en c tegenover A, B en C, en oppervlakte O is, dan gelden de volgende betrekkingen:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (\textit{sinusregel})$$

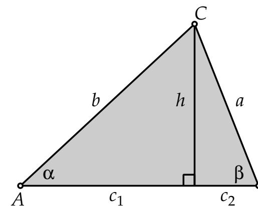
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (\textit{cosinusregel})$$

$$O = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ca\sin\beta = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad (\textit{oppervlakteformule}).$$

Bewijs van de sinusregel:

$h = b\sin\alpha = a\sin\beta$ dus $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$

en evenzo $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.



Bewijs van de oppervlakteformule:

$O = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, etc.

Bewijs van de cosinusregel:

$a^2 = h^2 + c_2^2 = (b^2 - c_1^2) + (c - c_1)^2 = b^2 + c^2 - 2c_1c = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha$.

18. Exponentiële en logaritmische functies

Teken de grafiek van de volgende functies. Een ruwe schets is voldoende. Let wel op eventuele snijpunten met de coördinaatassen en de horizontale asymptoot. Je hoeft de schaalverdelingen op de beide assen niet gelijk te kiezen.

18.1

a. $f(x) = 2^{x-1}$

b. $f(x) = 2^{1-x}$

c. $f(x) = 10^{2x}$

d. $f(x) = (11/10)^{x+2}$

e. $f(x) = 3^{3x}$

18.2

a. $f(x) = 3^{2x-1}$

b. $f(x) = (1/3)^{3-x}$

c. $f(x) = (1/10)^{x+1}$

d. $f(x) = (9/10)^{x-2}$

e. $f(x) = (2/3)^{2x+2}$

18.3

a. $f(x) = 2^{x-1} - \frac{1}{2}$

b. $f(x) = 2^{1-x} - 8$

c. $f(x) = 10^{2x} - 100$

d. $f(x) = (11/10)^{x+2} + 1$

e. $f(x) = 3^{3x} - 9$

18.4

a. $f(x) = 4^{(x-1)/2} - 4$

b. $f(x) = 7^{1-2x} - 49$

c. $f(x) = (1/3)^{2+x} + 2$

d. $f(x) = (4/3)^{(x+2)/3} + 1$

e. $f(x) = 13^{3x} - 13$

18.5 Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = 2^{-x} \quad \text{en} \quad h(x) = 2^x + 2^{-x}.$$

18.6 Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = -3^{-x} \quad \text{en} \quad h(x) = 3^x - 3^{-x}.$$

Bereken de volgende limieten.

18.7

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3^{x-1}}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{20}}{(3/2)^x}$

d. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{30}}{4^{2x}}$

e. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{70}}{2^{x-5}}$

18.8

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{2^x}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x}{3^{x-1}}$

c. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{20}}{(4/3)^{-x}}$

d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{30}}{4^{1-2x}}$

e. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{70}}{2^{2-2x}}$

18.9

a. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x}{x^{200}}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^{-x}}{x^{-1}}$

c. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3^{-x}}{x^5}$

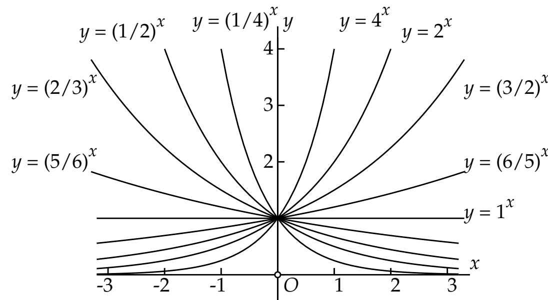
d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3^{2x}}{2^{3x}}$

e. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7}{7^{x-5}}$

Exponentiële functies

Functies van de vorm $f(x) = a^x$ voor $a > 0$ heten *exponentiële functies*. Hieronder is voor enige waarden van a de grafiek van a^x getekend.

Al die grafieken gaan door $(0, 1)$ want voor elke a geldt $a^0 = 1$. Zo'n grafiek is stijgend als $a > 1$, en dalend als $0 < a < 1$.
Voor $a = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = 1$ want $1^x = 1$ voor elke x.
De grafieken van a^x en $(1/a)^x$ zijn elkaars spiegelbeeld in de y-as want $(1/a)^x = \left(a^{-1}\right)^x = a^{-x}$.



Voor elke $a \neq 1$ is de x-as een horizontale asymptoot van de grafiek. Voor $a > 1$ geldt namelijk $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ en voor $a < 1$ geldt $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.

Alle grafieken liggen helemaal in het bovenhalfvlak, want $a^x > 0$ voor elke x en elke $a > 0$.

De rekenregels voor machten uit hoofdstuk 3 (zie bladzijde 25) die we daar voor rationale exponenten hebben afgeleid, zijn ook algemeen geldig voor willekeurige reële getallen als exponent. We geven ze hier in een aangepaste gedaante. Ze gelden voor elke positieve a en b en alle reële getallen x en y.

$$\begin{array}{rcl} a^x \times a^y & = & a^{x+y} \\ a^x : a^y & = & a^{x-y} \\ (a^x)^y & = & a^{x \times y} \\ (a \times b)^x & = & a^x \times b^x \\ (a : b)^x & = & a^x \ : \ b^x \end{array}$$

Als $a > 1$ is, stijgt de functie $f(x) = a^x$ op den duur sneller dan iedere functie van de vorm $g(x) = x^p$, hoe groot p ook is. Er geldt namelijk voor elke p dat

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad \text{als} \quad a > 1.$$

Neem ter illustratie $p = 1\,000\,000 (= 10^6)$ en $a = 10$. Voor $x > 1$ is $x^{1000000}$ aanvankelijk veel groter dan 10^x, maar neem je bijvoorbeeld $x = 10^{100}$ dan is 10^x een getal van $10^{100} + 1$ cijfers, terwijl $x^{1000000}$ 'slechts' $10^8 + 1$ cijfers telt.

Teken de grafiek van de volgende functies. Een ruwe schets is voldoende. Let wel op eventuele snijpunten met de coördinaatassen en de verticale asymptoot. Je hoeft de schaalverdelingen op de beide assen niet gelijk te kiezen.

18.10

a. $f(x) = {}^2\log(x-1)$

b. $f(x) = {}^2\log(1-x)$

c. $f(x) = {}^{10}\log(2x)$

d. $f(x) = {}^3\log(x+2)$

e. $f(x) = {}^{3/2}\log(3x)$

18.11

a. $f(x) = {}^{1/2}\log(x-2)$

b. $f(x) = {}^{2/3}\log(4x)$

c. $f(x) = {}^{1/10}\log(3x+10)$

d. $f(x) = {}^{3/4}\log(3x-2)$

e. $f(x) = {}^{1/2}\log(32x)$

18.12

a. $f(x) = {}^2\log|x|$

b. $f(x) = {}^2\log|4x|$

c. $f(x) = {}^{10}\log|x-1|$

d. $f(x) = {}^3\log\sqrt{x}$

e. $f(x) = {}^{3/2}\log(x^2)$

18.13

a. $f(x) = {}^{1/2}\log(2/x)$

b. $f(x) = {}^{2/3}\log(\frac{2}{3}x^2)$

c. $f(x) = {}^{1/10}\log|10-3x|$

d. $f(x) = {}^4\log(64x^5)$

e. $f(x) = {}^{10}\log(1000/x^2)$

18.14 Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$f(x) = {}^{10}\log x, \quad g(x) = {}^{10}\log 10x \quad \text{en} \quad h(x) = {}^{10}\log 100x.$$

18.15 Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$f(x) = {}^2\log(1-x), \quad g(x) = {}^2\log(1+x) \quad \text{en} \quad h(x) = {}^2\log(1-x^2).$$

Bereken de volgende limieten.

18.16

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{10}\log x}{x+1}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{10}\log(x+1)}{x}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{10}\log(x^2)}{x^2+1}$

d. $\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{10}\log(x^{100})}{\sqrt[100]{x}}$

e. $\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{1/10}\log(1000x)}{1000x+1}$

18.17

a. $\lim_{x\downarrow 0} x\left({}^2\log x\right)$

b. $\lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}\left({}^{1/2}\log x\right)$

c. $\lim_{x\downarrow 0} x\left({}^{10}\log(100x)\right)$

d. $\lim_{x\downarrow 0} x^3\left({}^{1/3}\log x\right)$

e. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\left({}^3\log|x|\right)$

Hint bij deze serie: schrijf $y = \frac{1}{x}$

Logaritmische functies

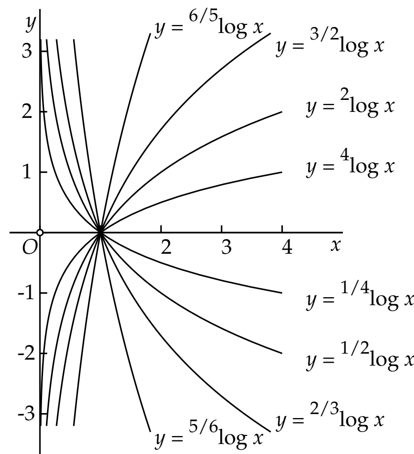
Voor $x > 0$ wordt bij elke $a > 0$, $a \neq 1$ de *logaritme* ${}^a\log x$ met grondtal a gedefinieerd als het getal y waarvoor geldt dat $a^y = x$, dus

$$\boxed{{}^a\log x = y \qquad \iff \qquad a^y = x.}$$

Functies van de vorm $f(x) = {}^a\log x$ heten *logaritmische functies*. De logaritmische functie met grondtal a en de exponentiële functie met grondtal a zijn elkaars inverse, dat wil zeggen dat wat de ene functie doet, door de andere weer ongedaan wordt gemaakt. Voor elke $x > 0$ geldt namelijk $a^{{}^a\log x} = x$ en voor elke y geldt ${}^a\log(a^y) = y$.

We kunnen de grafiek van een logaritmische functie verkrijgen door de grafiek van de bijbehorende exponentiële functie te spiegelen in de lijn $y = x$.

Op die manier is de nevenstaande figuur ook uit die van bladzijde 149 verkregen.
Alle grafieken gaan door $(1, 0)$ want voor elke a geldt ${}^a\log 1 = 0$. Zo'n grafiek is stijgend als $a > 1$ en dalend als $0 < a < 1$.
De grafieken van ${}^a\log x$ en ${}^{1/a}\log x$ zijn elkaars spiegelbeeld in de x-as.
De eigenschappen van exponentiële functies van bladzijde 149 kunnen vertaald worden in eigenschappen van logaritmische functies. We noemen de belangrijkste:



$$\boxed{\begin{aligned} {}^a\log(xy) &= {}^a\log x + {}^a\log y \\ {}^a\log(x/y) &= {}^a\log x - {}^a\log y \\ {}^a\log(x^y) &= y\,{}^a\log x. \end{aligned}}$$

Voor $a > 1$ is $f(x) = {}^a\log x$ een stijgende functie, maar die stijging is minder snel dan de stijging van elke functie van de vorm $g(x) = x^q$ met $q > 0$, ook al is q nog zo klein (maar wel positief). Neem bijvoorbeeld $a = 10$ en $q = 1/1\,000\,000$. Hoewel $f(x)$ en $g(x)$ voor $x \to +\infty$ beide naar oneindig gaan, gaat het quotiënt $f(x)/g(x)$ naar nul. De algemene formule luidt:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{{}^a\log x}{x^q} = 0 \quad \text{als} \quad q > 0.}$$

Teken de grafiek van de volgende functies. Een ruwe schets is voldoende. Je hoeft de schaalverdelingen op de beide assen niet gelijk te kiezen.

18.18

a. $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$

b. $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$

c. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

d. $f(x) = \mathrm{e}^{|x-1|}$

e. $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$

18.19

a. $f(x) = \ln(1+x)$

b. $f(x) = \ln(1-x)$

c. $f(x) = \ln|x|$

d. $f(x) = \ln|1-x|$

e. $f(x) = \ln|1-x^2|$

18.20 De *cosinus hyperbolicus*, de *sinus hyperbolicus* en de *tangens hyperbolicus*, afgekort tot respectievelijk *cosh*, *sinh* en *tanh*, worden gedefinieerd door

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Schets de grafiek van deze functies en bewijs de volgende formules.

a. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

b. $\tanh^2 x + 1/\cosh^2 x = 1$

c. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

d. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Opmerking: men kan bewijzen dat de grafiek van de cosinus hyperbolicus de vorm van een hangende ketting heeft. Die grafiek wordt daarom ook wel de *kettinglijn* (in het Engels *catenary*) genoemd.

18.21 Bereken:

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-3x} - 1}{x}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - 1}{x}$

e. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{\sqrt{x}}$

18.22 Bereken:

a. $\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}}{x-1}$

b. $\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2}}{x-2}$

c. $\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{a}}{x-a}$

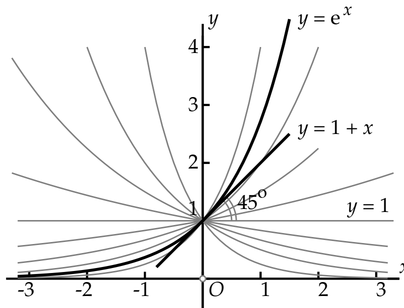
d. $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$

e. $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x}$

De functie e^x en de natuurlijke logaritme

De grafieken van de exponentiële functies van de vorm $f(x) = a^x$ met $a > 0$ snijden de y-as allemaal in het punt $(0, 1)$. Alle grafieken hebben in dat punt een raaklijn. Al die raaklijnen zijn verschillend, en allemaal hebben ze een vergelijking van de vorm $y = 1 + mx$ voor zekere m.

Er is precies één waarde van a waarvoor $m = 1$, dat wil zeggen dat de lijn $y = 1 + x$ de raaklijn is aan de grafiek van $f(x) = a^x$ in $(0, 1)$. Dat getal wordt e genoemd, en de bijbehorende functie $f(x) = e^x$ speelt een belangrijke rol in de differentiaal- en integraalrekening. Hiernaast is de grafiek ervan getekend. Men kan bewijzen dat het getal e, net als het getal π of het getal $\sqrt{2}$, een *irrationaal* getal is. Er geldt $e = 2.718281828459\ldots$.



Voor kleine waarden van x vallen de grafiek van $f(x) = e^x$ en de raaklijn $y = 1 + x$ vrijwel samen, dus voor kleine x geldt $e^x \approx 1 + x$. Zelfs geldt dat $\dfrac{e^x - 1}{x} \approx 1$ voor $x \approx 0$, of, nog preciezer uitgedrukt met behulp van een limiet

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

De logaritme met grondtal e heet de *natuurlijke logaritme*. In plaats van ${}^{e}\log x$ schrijft men meestal $\ln x$.

Omdat de e-macht en de natuurlijke logaritme elkaars inverse zijn, geldt voor elke $x > 0$ dat $x = e^{\ln x}$. Passen we dit toe op a^x in plaats van op x, dan krijgen we $a^x = e^{\ln a^x}$ en omdat $\ln a^x = x \ln a$ is, levert dit een manier op om de exponentiële functie a^x als e-macht te schrijven, hetgeen, zoals we later zullen zien, veel nuttige toepassingen heeft:

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}.}$$

Als eerste toepassing leiden we af

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.}$$

Bewijs: $\dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \dfrac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a \;\to\; \ln a$ als $x \to 0$.

Teken de grafiek van de volgende functies. Een ruwe schets is voldoende.
Hint: breng telkens eerst het functievoorschrift met behulp van de rekenregels voor logaritmen in een meer 'hanteerbare' vorm. Bepaal ook steeds eerst het domein van de functie, dat wil zeggen de x-waarden waarvoor het functievoorschrift kan worden toegepast.

18.23

a. $f(x) = \ln(x - 4)$
b. $f(x) = \ln 4x$
c. $f(x) = \ln(4 - x)$
d. $f(x) = \ln(4x - 4)$
e. $f(x) = \ln(2x - 3)$
f. $f(x) = \ln(2 - 3x)$
g. $f(x) = \ln|x - 3|$
h. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$
i. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x-1}$
j. $f(x) = \ln \dfrac{2}{x-2}$

18.24

a. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2}$
b. $f(x) = \ln \dfrac{2}{1-2x}$
c. $f(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
d. $f(x) = \ln \dfrac{1}{|x|}$
e. $f(x) = \ln \dfrac{2}{|x-2|}$
f. $f(x) = \ln \dfrac{3}{x^3}$
g. $f(x) = \ln \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

18.25 Bewijs dat $\,{}^{a}\!\log b = \dfrac{1}{{}^{b}\!\log a}$.

Bereken de volgende limieten.

18.26

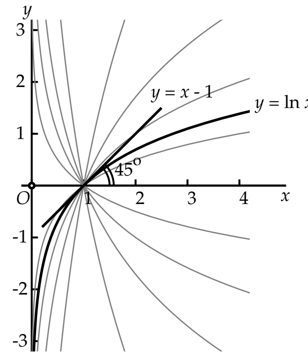
a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$
b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$
c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{2x}$
d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$
e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$

18.27

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{{}^{2}\!\log x}{x-1}$
b. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{{}^{3}\!\log x}{1-x}$
c. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$
d. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x-3}$
e. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$

Meer over logaritmische functies

De onderstaande figuur toont de grafiek van de natuurlijke logaritmefunctie temidden van een aantal grafieken van andere logaritmische functies.



De karakteristieke eigenschap ervan is dat de lijn $y = x - 1$, die de x-as onder een hoek van 45° snijdt, de raaklijn aan de grafiek is in het punt $(1, 0)$. Voor waarden van x die dicht bij 1 liggen, vallen grafiek en raaklijn vrijwel samen. Er geldt dan niet allleen dat $\ln x \approx x - 1$ als $x \approx 1$, maar, sterker nog,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

Wanneer we hierin $x = 1 + u$ substitueren, verkrijgen we een limiet voor $u \to 0$, die in deze vorm vaak in toepassingen gebruikt wordt:

$$\boxed{\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = 1.}$$

Uit de formules $a^{{}^a\log b} = b$ en ${}^a\log b^d = d\ {}^a\log b$ (zie bladzijde 151) volgt

$${}^a\log b\ {}^c\log a = {}^c\log\left(a^{{}^a\log b}\right) = {}^c\log b.$$

Als we dit schrijven in de vorm

$$\boxed{{}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}}$$

dan kunnen we hiermee logaritmen met grondtal a omrekenen in logaritmen met grondtal c. Nemen we in het bijzonder $c = \mathrm{e}$, dan ontstaat de formule

$$\boxed{{}^a\log x = \frac{1}{\ln a} \ln x}$$

waaruit blijkt dat elke logaritmische functie op een constante factor na gelijk is aan de natuurlijke logaritmefunctie $\ln x$. Ook in de bovenstaande figuur is dit goed te zien. In de differentiaal- en integraalrekening maakt men vaak gebruik van deze eigenschap.

19. Geparametriseerde krommen

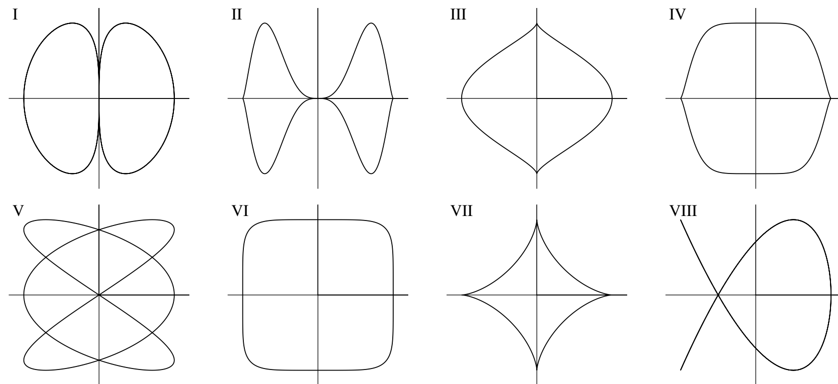
19.1 Laat zien dat de ellips op de bladzijde hiertegenover gegeven wordt door de vergelijking $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

19.2 Geef een parametrisatie van diezelfde ellips maar met de omgekeerde omloopszin en zorg er daarbij ook voor dat $P_0 = (0, 2)$.

19.3 Geef een parametrisatie van:

a. De cirkel met middelpunt $(1, 0)$ en straal 2.
b. De cirkel met middelpunt $(-1, 3)$ en straal 3.
c. De cirkel met middelpunt $(2, -3)$ en straal 5.
d. De lijn door de punten $(-1, 1)$ en $(1, -2)$.
e. De lijn door de punten $(1, 0)$ en $(0, 2)$.
f. De lijn door de punten $(-1, 2)$ en $(1, 2)$.

19.4 Zoek bij elke kromme de bijpassende parametrisatie. Motiveer je antwoorden. Gebruik geen grafische rekenmachine.

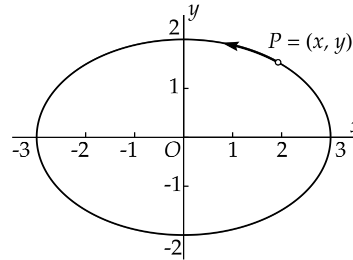


a. $(\cos 3t, \sin 2t)$
b. $(\cos 2t, \sin 3t)$
c. $(\cos^3 t, \sin^3 t)$
d. $(\cos^3 t, \sin t)$
e. $(\cos^3 t, \sin 2t)$
f. $(\cos \frac{1}{2}t, \sin^3 t)$
g. $(\sqrt[3]{\cos t}, \sqrt[3]{\sin t})$
h. $(\sqrt[3]{\cos t}, \sin^3 t)$

19.5 Laat zien dat $(x, y) = (t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t})$ een parametrisatie is van de hyperbool $x^2 - y^2 = 4$. Welke waarden van t corresponderen met de linkertak en welke met de rechtertak? Hoe vind je de asymptoten?

Krommen in het vlak

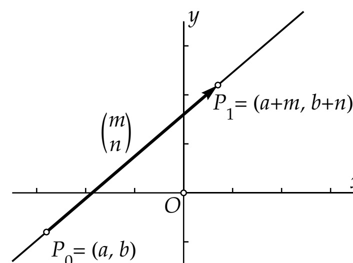
De hiernaast getekende ellips bestaat uit alle punten $P = (x, y)$ waarvoor geldt dat $x = 3\cos t$ en $y = 2\sin t$. De coördinaten x en y zijn dus functies van een variabele t. Als t van 0 naar 2π loopt, doorloopt het punt P de ellips in de pijlrichting. Voor $t = 0$ is $P = (3, 0)$, voor $t = \frac{\pi}{2}$ is $P = (0, 2)$, voor $t = \pi$ is $P = (-3, 0)$, voor $t = \frac{3\pi}{2}$ is $P = (0, -2)$ en voor $t = 2\pi$ is P weer terug in $(3, 0)$.



In het algemeen kun je door middel van twee functies $x = x(t)$ en $y = y(t)$ een *kromme in het vlak* beschrijven. Zo'n beschrijving heet een *parametrisatie* of *parametervorm* van de kromme. De variabele t heet dan de *parameter*. Men neemt daarbij altijd aan dat de functies $x(t)$ en $y(t)$ op het t-domein in kwestie *continu* zijn, dat wil zeggen dat ze geen sprongen maken. De kromme $(x(t), y(t))$ heeft dan ook geen sprongpunten. Het kan een *gesloten* kromme zijn, dat wil zeggen dat de kromme op zeker moment weer terugkeert in een punt dat reeds eerder is bezocht (zoals bij de ellips hierboven), maar dat is niet noodzakelijk.

De variabele t, die de plaats van P op de kromme beschrijft, stelt in veel toepassingen de *tijd* voor, bijvoorbeeld gemeten in seconden. in dat geval is $(x(t), y(t))$ dus de plaats van P op de kromme op het tijdstip t. Soms schrijft men P_t voor de plaats van P op tijdstip t.

Een heel eenvoudige situatie is die waarin x en y allebei *lineaire* functies zijn van t, dus $x = a + mt$ en $y = b + nt$ voor zekere a, b, m en n. De 'kromme' die het punt $P = (x, y)$ doorloopt, is dan de rechte lijn door $P_0 = (a, b)$ en $P_1 = (a + m, b + n)$. De vector die van P_0 naar P_1 loopt, heeft de coördinaten $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. Men noemt dit een *richtingsvector* van de lijn.



Alle lijnen in het vlak, ook de verticale lijnen, kunnen op deze manier beschreven worden. De enige voorwaarde is dat m en n niet beide nul mogen zijn. Als $m = 0$ en $n \neq 0$ is de lijn verticaal, als $m \neq 0$ en $n = 0$ is de lijn horizontaal.

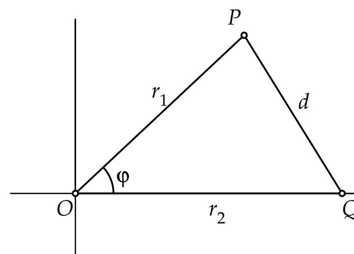
19.6 Teken in het vlak de verzameling van alle punten die voldoen aan

a. $r < 3$
b. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{5}$
c. $1 \leq r \leq 2, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$
d. $r > 2, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}$
e. $r = \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
f. $0 \leq r \leq \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
g. $r = \dfrac{1}{\cos\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$

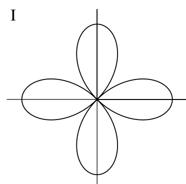
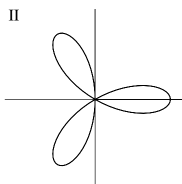
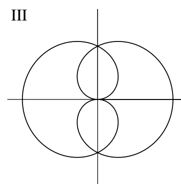
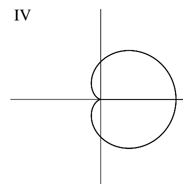
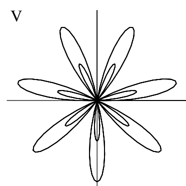
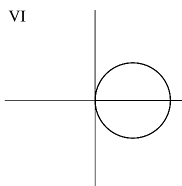
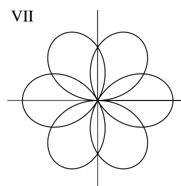
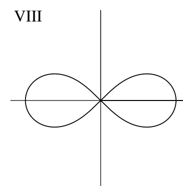
19.7 Leid de *cosinusregel*

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi$$

af door in de driehoek met hoekpunten $O = (0,0)$, $P = (r_1\cos\varphi, r_1\sin\varphi)$ en $Q = (r_2, 0)$ het kwadraat van de afstand $d = d(P,Q)$ te berekenen.



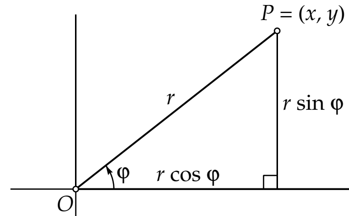
19.8 Zoek bij elke kromme de bijpassende vergelijking in r en φ. Motiveer je antwoorden. Gebruik geen grafische rekenmachine.

I

II

III

IV

V

VI

VII

VIII


a. $r = \cos\varphi$
b. $r = \cos 2\varphi$
c. $r = \cos 3\varphi$
d. $r = \sin\frac{1}{2}\varphi$
e. $r = \cos\frac{3}{2}\varphi$
f. $r^2 = \cos 2\varphi$
g. $r = 1 + \cos\varphi$
h. $r = 1 + 3\cos 7\varphi$

Poolcoördinaten

Als in het vlak een Oxy-coördinatenstelsel gegeven is, kan de positie van een punt P, behalve door de coördinaten (x, y), ook door twee andere getallen worden vastgelegd: de afstand $r = d(O, P)$ van P tot de oorsprong O, en de hoek φ die de verbindingslijn OP maakt met de positieve x-as.



Zoals gebruikelijk meten we die hoek weer in radialen, en wel tegen de klok in. Natuurlijk ligt φ slechts op veelvouden van 2π na vast. De getallen r en φ heten de *poolcoördinaten* van P. De oorsprong O noemt men in dit verband ook wel de *pool*, en de positieve x-as heet dan de *poolas*. Uit de poolcoördinaten van P kan men de gewone coördinaten gemakkelijk afleiden:

$$x = r\cos\varphi \quad \text{en} \quad y = r\sin\varphi.$$

Verder geldt volgens Pythagoras en de definitie van de tangens dat

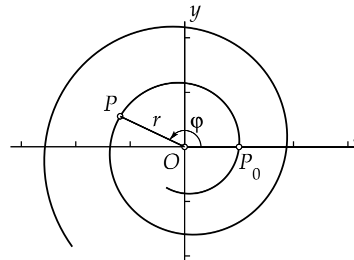
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{en} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (\text{mits } x \neq 0).$$

Voor $P = (0, 0)$ is φ niet gedefinieerd.

Sommige krommen zijn gemakkelijk te beschrijven door het verband tussen r en φ aan te geven. Zo wordt een *logaritmische spiraal* gegeven door een vergelijking van de vorm

$$\ln r = c\varphi$$

voor zekere constante c. In de tekening hiernaast is $c = 0.1$ gekozen.



De vergelijking kan ook geschreven worden als $r = \mathrm{e}^{c\varphi}$, en daarmee liggen de gewone coördinaten (x, y) van een punt P op de spiraal vast:

$$P = (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (\mathrm{e}^{c\varphi}\cos\varphi, \mathrm{e}^{c\varphi}\sin\varphi)\,.$$

Dit is een parametrisatie van de logaritmische spiraal met φ als parameter.

In het algemeen definieert elke continue functie $r = r(\varphi)$ een geparametriseerde kromme $(x, y) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$ met φ als parameter. Ook als $r(\varphi) < 0$ is voor zekere waarden van φ wordt deze definitie gebruikt, hoewel strict genomen de poolcoördinaten van zo'n punt dan niet r en φ, maar $-r = |r|$ en $\varphi + \pi$ zijn.

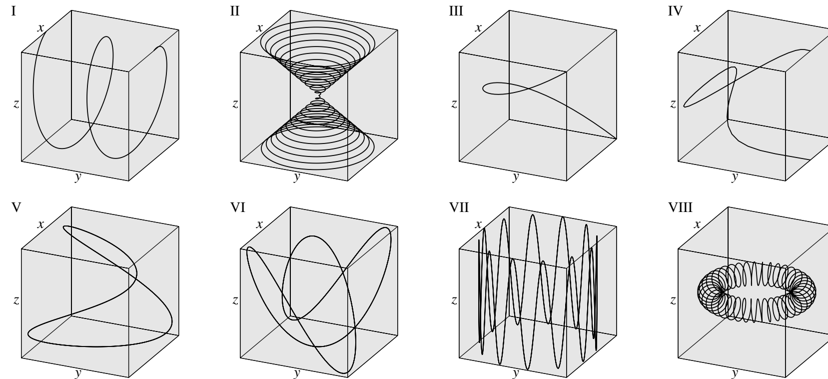
19.9 Bepaal een parametrisatie van de volgende lijnen.

a. De lijn door $(0, 1, 1)$ en $(-1, 1, 2)$.
b. De lijn door $(1, -1, 1)$ en $(2, 0, 0)$.
c. De lijn door $(3, 0, 1)$ en $(-1, -1, 0)$.
d. De lijn door $(1, 0, -1)$ en $(-2, 4, 1)$.
e. De lijn door $(2, -1, -1)$ en $(0, 0, -2)$.
f. De snijlijn van de vlakken $x - y + 2z = 0$ en $2x + y - z = 1$.
g. De snijlijn van de vlakken $-x + 3y + z = 1$ en $2x + 2y - z = -2$.
h. De snijlijn van de vlakken $3x - y = 5$ en $x - 2y - 3z = 0$.
i. De snijlijn van de vlakken $2x - y + 2z = 0$ en $2x + y - z = 1$.
j. De snijlijn van de vlakken $-x + 3z = 2$ en $x + y - z = 3$.

19.10 Bepaal een parametrisatie van de volgende lijnen.

a. De x-as, de y-as en de z-as.
b. De snijlijn van de vlakken $x = 1$ en $z = -1$.
c. De snijlijn van de vlakken $x = y$ en $y = z$.

19.11 Zoek bij elke kromme de bijpassende parametrisatie. Motiveer je antwoorden. Gebruik geen grafische rekenmachine. Elke kromme is getekend binnen de kubus met hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.



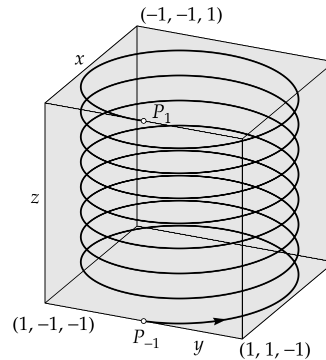
a. $(t, 2t^2 - 1, t^3)$
b. $(\sin t, \sin 2t, \cos t)$
c. $(\sin t, \sin 2t, \cos 3t)$
d. $(\sin 2\pi t, t, \cos 2\pi t)$
e. $(\sin 2\pi t, t^2 - 1, t^3)$
f. $\frac{1}{5}((4 + \sin 40t) \cos t, (4 + \sin 40t) \sin t, \cos 40t)$
g. $(\cos t, \sin t, \cos 12t)$
h. $(t \cos 24\pi t, t \sin 24\pi t, t)$

Krommen in de ruimte

Als in de ruimte een $Oxyz$-coördinatenstelsel gegeven is, wordt een geparametriseerde kromme gegeven door *drie* continue functies $x = x(t)$, $y = y(t)$ en $z = z(t)$ van een parameter t. Dan is $(x(t), y(t), z(t))$ het punt van de kromme dat correspondeert met de parameterwaarde t. Als t de tijd voorstelt en P is een punt dat zich volgens deze parametrisatie langs de kromme beweegt, dan is $(x(t), y(t), z(t))$ de positie van P op het tijdstip t.

Hiernaast is de kromme getekend die gegeven wordt door de parametrisatie

$$\begin{cases} x(t) &= \cos 8\pi t \\ y(t) &= \sin 8\pi t \\ z(t) &= t \end{cases}$$



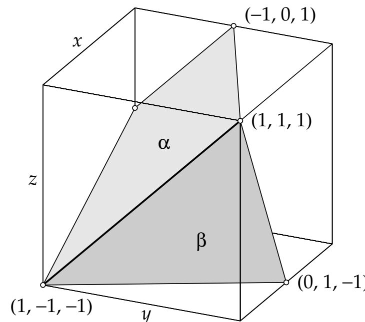
Als t-domein is het interval $-1 \leq t \leq 1$ gekozen. De kromme is een spiraal die begint in $P_{-1} = (1, 0, -1)$ en die na acht volledige omwentelingen eindigt in $P_1 = (1, 0, 1)$. Om de ruimtelijke indruk te vergroten is er de kubus met hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ omheen getekend.

Wanneer x, y en z *lineaire* functies van t zijn, dus $x(t) = a + mt$, $y(t) = b + nt$, $z(t) = c + pt$, dan is de 'kromme' een rechte lijn (vergelijk ook bladzijde 157).

De *richtingsvector* is in dit geval de vector $\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$.

Een parametrisatie van de snijlijn van twee vlakken vind je door uit de beide vergelijkingen één variabele te elimineren en een van de beide andere variabelen t te stellen. Als voorbeeld nemen we de vlakken

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \quad (\alpha) \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \quad (\beta). \end{array}$$



Eliminatie van x geeft $-5y + 5z = 0$. Stel (bijvoorbeeld) $z = t$, dan is ook $y = t$, en substitutie hiervan in de vergelijking voor α geeft dan $x - 2t + 2t = 1$, dus $x = 1$.

Een parametrisatie van de snijlijn is dus $(x, y, z) = (1, t, t)$.

VII Calculus

De differentiaalrekening en de integraalrekening – in de Amerikaanse literatuur samen vaak kortweg met de term 'calculus' aangeduid als afkorting van *differential and integral calculus* – behoren ongetwijfeld tot de meest succesvolle onderdelen van de wiskunde. Toepassingen ervan strekken zich uit van sterrenkunde tot nanotechnologie, van civiele techniek tot quantummechanica, van natuur- en scheikunde tot economie, van kansrekening en statistiek tot populatiedynamica.
Wij behandelen in dit boek voornamelijk de wiskundige techniek. Toch spelen toepassingen op de achtergrond een belangrijke rol: onze behandeling is zo ingericht dat daar een optimale basis voor wordt gelegd. Daarom wordt veel aandacht besteed aan het werken met differentialen, want die zijn in vrijwel alle toepassingen het aangrijpingspunt voor wiskundige modelvorming.

20. Differentiëren

Bereken met behulp van de rekenregels en de lijst van standaardafgeleiden op bladzijde 169 de afgeleide van de volgende functies.

20.1
- a. x^2
- b. $2x^5$
- c. $4x^7$
- d. $10x^{10}$
- e. $4x + x^3$

20.2
- a. $x^3 - 3$
- b. $x^2 - 2x + 1$
- c. $x^4 - 3x^3 + 2$
- d. $8x^8$
- e. $x^6 - 6x^4$

20.3
- a. $4x^4 - 3x^2 + 2$
- b. $2000x^{2000}$
- c. $7x^7 - 6x^6$
- d. $x^3 + 7x^7 - 12$
- e. $x^2 - 5x^3 + x$

20.4
- a. $\sqrt{x}$
- b. $\sqrt{x+1}$
- c. $\sqrt{x^3}$
- d. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$
- e. $\sqrt{2x}$

20.5
- a. $\sqrt[3]{x}$
- b. $x^{2/3}$
- c. $\sqrt[4]{x}$
- d. $\sqrt[4]{x-1}$
- e. $\sqrt[5]{x^2}$

20.6
- a. $\sqrt[7]{x^2}$
- b. $\sqrt{3x^3}$
- c. $\sqrt[3]{2x^5}$
- d. $\sqrt[4]{x^5}$
- e. $\sqrt{x^7}$

20.7
- a. x^{-1}
- b. $2x^{-2}$
- c. $3x^{-3}$
- d. $x^{-1/2}$
- e. $x^{-2/3}$

20.8
- a. $x^{2.2}$
- b. $x^{4.7}$
- c. $x^{-1.6}$
- d. $x^{0.333}$
- e. $x^{-0.123}$

20.9
- a. $(x+1)^{1/2}$
- b. $(x-1)^{-1/2}$
- c. $(x-3)^{-3}$
- d. $(x-5)^{-1/5}$
- e. $(x+50)^{-50}$

Bepaal een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de gegeven functie $f(x)$ in het punt $(a, f(a))$.

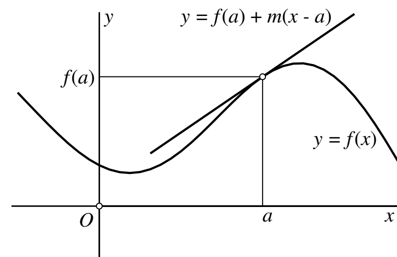
20.10
- a. $f(x) = 2x^2 - 3,\quad a = 1$
- b. $f(x) = x^5 - 3x^2 + 3,\quad a = -1$
- c. $f(x) = 4x^3 + 2x - 3,\quad a = 0$
- d. $f(x) = 8x^4 - x^7,\quad a = 2$
- e. $f(x) = 4x - 2x^2 + x^3,\quad a = -1$

20.11
- a. $f(x) = x^2 - 3x^{-1},\quad a = 1$
- b. $f(x) = x^2 - 3\sqrt{x} - 3,\quad a = 4$
- c. $f(x) = x^3 + x - 3,\quad a = 0$
- d. $f(x) = x^{-4} - 2,\quad a = 1$
- e. $f(x) = 8x - 2x^2,\quad a = -3$

Raaklijn en afgeleide

De grafieken van veel functies hebben in alle of bijna alle punten een 'glad' verloop: als je steeds sterker op zo'n punt inzoomt, gaat de grafiek steeds meer op een rechte lijn lijken. Die lijn is de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Hiernaast is de grafiek van zo'n functie $f(x)$ getekend, met daarbij ook de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. Vlak in de buurt van dat punt zijn grafiek en raaklijn inderdaad nauwelijks van elkaar te onderscheiden.



In het vervolg zullen we slechts punten van de grafiek bekijken waar de raaklijn niet verticaal is. De vergelijking ervan kan dan geschreven worden als $y = f(a) + m(x - a)$ voor een zekere m, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.

Voor $x \approx a$ geldt dan blijkbaar dat $f(x) \approx f(a) + m(x - a)$ en die gelijkenis is beter naarmate x dichter bij a ligt. De richtingscoëfficiënt m kan door middel van een limiet in termen van de functie $f(x)$ en het punt a worden uitgedrukt:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Men noemt m de *afgeleide* van $f(x)$ in a, en gebruikt daarvoor de notatie $f'(a)$. Andere veel gebruikte notaties zijn $\frac{df}{dx}(a)$ en $\frac{d}{dx}f(a)$.

In de vorige hoofdstukken hebben we eigenlijk al in een paar gevallen de afgeleide van een functie in een speciaal punt met behulp van zo'n limiet gevonden. Zo is de afgeleide van $\sin(x)$ in $x = 0$ gelijk aan 1 want

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(zie bladzijde 145). Evenzo zijn de afgeleiden van de functies e^x en $\ln(1 + x)$ in $x = 0$ beide gelijk aan 1 (ga na; zie bladzijde 153 en bladzijde 155).

Bereken met behulp van de rekenregels en de lijst van standaardafgeleiden op bladzijde 169 de afgeleide van de volgende functies.

20.12
a. e^{2x+1}
b. e^{1-x}
c. $2e^{-x}$
d. $3e^{1-x}$
e. e^{x^2}

20.13
a. e^{x^2-x+1}
b. e^{1-x^2}
c. $3e^{3-x}$
d. $2e^{\sqrt{x}}$
e. $e^{1+\sqrt{x}}$

20.14
a. 2^{x+2}
b. 3^{1-x}
c. 2^{2-3x}
d. 5^{x^2}
e. $3^{\sqrt[3]{x}}$

20.15
a. $\ln(1-2x)$
b. $\ln(3x^2-8)$
c. $\ln(3x-4x^2)$
d. $\ln(x^3+x^6)$
e. $\ln(x^2+1)$

20.16
a. $\ln\sqrt{x+1}$
b. $\ln x^2$
c. $\ln\sqrt[3]{x}$
d. $\ln\sqrt[3]{1-x}$
e. $\ln(4-x)^2$

20.17
a. ${}^{2}\log x$
b. ${}^{3}\log x^3$
c. ${}^{10}\log(x+1)$
d. ${}^{10}\log\sqrt{x+1}$
e. ${}^{2}\log(x^2+x+1)$

Onderzoek bij de volgende functies voor welke x ze wel gedefinieerd, maar niet differentieerbaar zijn.

20.18
a. $f(x) = |x-1|$
b. $f(x) = |x^2-1|$
c. $f(x) = \sqrt{|x|}$
d. $f(x) = |\ln(x-1)|$
e. $f(x) = e^{|x|}$

20.19
a. $f(x) = \sin|x|$
b. $f(x) = \cos|x|$
c. $f(x) = |\sin x|$
d. $f(x) = \sin\sqrt[3]{x}$
e. $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$

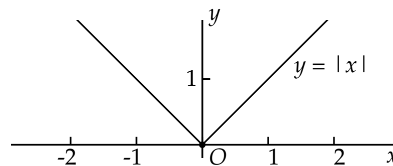
Differentieerbaarheid

In de vorige paragraaf is $f'(a)$ gedefinieerd als

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Het getal $f'(a)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in het punt $(a, f(a))$. Die limiet moet dan wel bestaan en bovendien eindig zijn, want we hebben aangenomen dat de raaklijn niet verticaal is. Wanneer aan deze beide voorwaarden voldaan is, heet $f(x)$ *differentieerbaar* in a.

Niet elke functie is differentieerbaar in elk punt. Zo is bijvoorbeeld de functie $f(x) = |x|$ niet differentieerbaar in 0 omdat $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ gelijk is aan 1 als $x > 0$ is, en gelijk is aan -1 als $x < 0$ is. De limiet voor $x \to 0$ bestaat dus niet. Ook aan de grafiek is dat te zien: die heeft in de oorsprong een knikpunt. Bij het inzoomen blijft die knik altijd zichtbaar aanwezig.

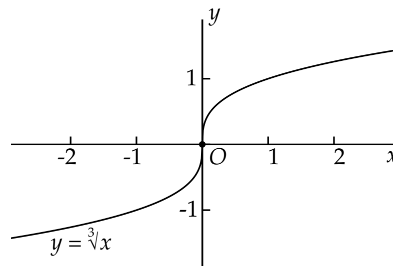


Maar ook als er wél een raaklijn is, hoeft een functie niet differentieerbaar te zijn, want zo'n raaklijn kan verticaal zijn. De limiet waarmee de afgeleide gedefinieerd wordt, is dan plus of min oneindig.

Zo is de de raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in de oorsprong verticaal, en inderdaad is

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Voor $x = 0$ is de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dus niet differentieerbaar.



Bereken de afgeleide van de volgende functies.

20.20
a. $\sin(x-3)$
b. $\cos(2x+5)$
c. $\sin(3x-4)$
d. $\cos(x^2)$
e. $\sin\sqrt{x}$

20.21
a. $\tan(x+2)$
b. $\tan(2x-4)$
c. $\sin(x^2-1)$
d. $\cos(1/x)$
e. $\tan\sqrt[3]{x}$

20.22
a. $\arcsin 2x$
b. $\arcsin(x+2)$
c. $\arccos x + \arcsin x$
d. $\arctan\sqrt{x}$
e. $\ln(\cos x)$

Bereken met behulp van de productregel de afgeleide van de volgende functies.

20.23
a. $x\sin x$
b. $x\cos 2x$
c. $x^2\ln x$
d. $(x+1)\tan x$
e. $(2x+1)\ln x$

20.24
a. $\sqrt{x+1}\ln x$
b. $(\sin x)(\ln x^2)$
c. $x\ln\sqrt[3]{x}$
d. $x\ln(\sin x)$
e. $\sqrt{x}\ln(1-x^2)$

20.25
a. $x^2\log x$
b. $\sqrt{x}\,({}^5\log x^3)$
c. $(x-1)({}^2\log x)$
d. $x\mathrm{e}^{-x}$
e. $x^2\mathrm{e}^{-x^2}$

Bereken met behulp van de quotiëntregel de afgeleide van de volgende functies.

20.26
a. $\dfrac{x}{x+1}$
b. $\dfrac{x-1}{x+1}$
c. $\dfrac{x^2}{x+1}$
d. $\dfrac{x}{x^2+1}$
e. $\dfrac{x-1}{x^2+x}$

20.27
a. $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$
b. $\dfrac{x^2-1}{x+2}$
c. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
d. $\dfrac{2x-3}{4x+1}$
e. $\dfrac{1-x}{2-x}$

20.28
a. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$
b. $\dfrac{\cos x}{x+1}$
c. $\dfrac{\arcsin x}{x+1}$
d. $\dfrac{\ln x}{\sin x}$
e. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Rekenregels en standaardafgeleiden

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, is de afgeleide dus in elk punt van dat interval gedefinieerd als een (eindig) reeel getal, en daarmee is de afgeleide op dat interval zelf een functie geworden, de *afgeleide functie*. Veel gebruikte notaties voor de afgeleide functie van $f(x)$ zijn $f'(x)$, $\dfrac{df}{dx}(x)$ en $\dfrac{d}{dx}f(x)$.

Rekenregels voor differentieerbare functies:

$$
\begin{aligned}
(c\,f(x))' &= c\,f'(x) \quad \text{voor elke constante } c \\
(f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x) \quad \text{(kettingregel)} \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \text{(productregel)} \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(quotiëntregel).}
\end{aligned}
$$

Standaardfuncties en hun afgeleiden:

$f(x)$	$f'(x)$	
x^p	$p\,x^{p-1}$	voor elke p
a^x	$a^x \ln a$	voor elke $a > 0$
e^x	e^x	
${}^a\log x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	voor elke $a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Bereken de tweede afgeleide van de volgende functies.

20.29

a. $\sqrt{x+1}$

b. $\dfrac{x-1}{x+1}$

c. $\ln(x^2+1)$

d. $x \ln x$

e. $x \sin x$

f. $x^2 \cos 2x$

20.30

a. $\sin(\sqrt{x})$

b. $\tan x$

c. $\arctan x$

d. $x\sqrt{x-1}$

e. $\dfrac{\sin x}{x}$

f. $\sin^2 x$

Bereken de tiende afgeleide van de volgende functies. Probeer daarbij eerst een patroon te ontdekken in de opvolgende afgeleiden.

20.31

a. x^9

b. x^{10}

c. x^{11}

d. e^{-x}

e. e^{2x}

f. e^{x+1}

20.32

a. $\dfrac{1}{x+1}$

b. $\ln x$

c. $\sin 2x$

d. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

e. $x\mathrm{e}^{x}$

f. $x\mathrm{e}^{-x}$

Hogere afgeleiden

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, kan de afgeleide functie ook weer een differentieerbare functie zijn. De afgeleide van de afgeleide heet dan de *tweede afgeleide*. Gebruikelijke notaties daarvoor zijn $f''(x)$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ en $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$. (Let bij de laatste twee notaties op de verschillende plaatsing van de 'exponent' 2 in de 'teller' en de 'noemer'!)

Zo kunnen we doorgaan en de n-de afgeleide van een functie definiëren als de afgeleide van de $(n-1)$-e afgeleide wanneer die laatste een differentieerbare functie is. In het algemeen wordt voor de n-de afgeleide met $n > 2$ meestal een van de volgende notaties gebruikt: $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$ of $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Sommige functies kunnen net zo vaak gedifferentieerd worden als we willen: voor elke n bestaat de n-de afgeleide. Men noemt zulke functies *oneindig vaak differentieerbaar*. We geven enige voorbeelden.

a. $f(x) = x^n$, waarbij n een positief geheel getal is.
Dan is $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ enzovoort. De exponent daalt bij elke stap met 1, en de n-de afgeleide is een constante, namelijk $n!$ (n-faculteit, zie bladzijde 55). Alle hogere afgeleiden zijn nul.

b. $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dan is $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ voor elke n.

c. $f(x) = \sin x$. Dan is $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, enzovoorts.

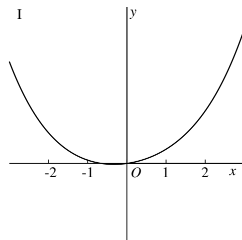
d. $f(x) = \cos x$. Dan is $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, enzovoorts.

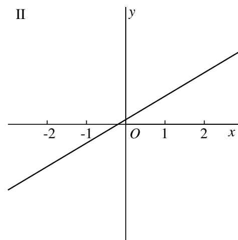
e. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Omdat we $f(x)$ ook kunnen schrijven als $f(x) = x^{-1}$ zijn de hogere afgeleiden gemakkelijk te bepalen:
$f'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2}$,
$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2!x^{-3}$,
$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = -3!x^{-4}$, enzovoorts.

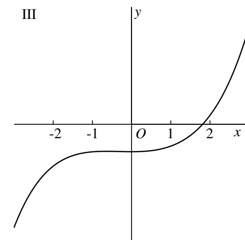
f. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Dan is $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,
$f''(x) = (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$,
$f^{(3)}(x) = (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, enzovoorts.

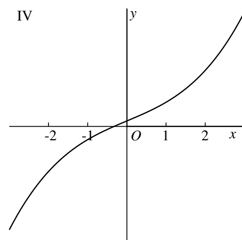
20.33 Maak een ruwe schets van de grafiek van de tweede afgeleide $f''(x)$ van het hiernaast behandelde vijfdegraadspolynoom.

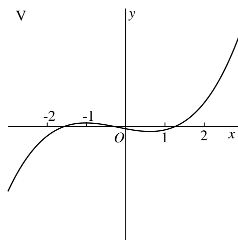
20.34 Hieronder zijn in een willekeurige volgorde de grafieken getekend van twee functies $f(x)$ en $g(x)$, hun afgeleiden $f'(x)$ en $g'(x)$ en hun tweede afgeleiden $f''(x)$ en $g''(x)$. Identificeer ze.

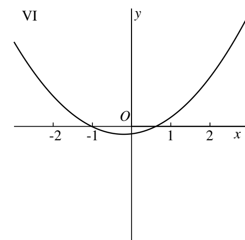




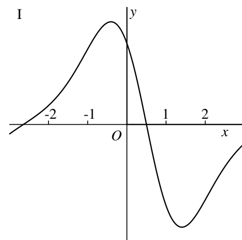


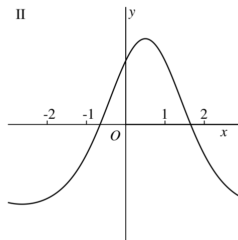


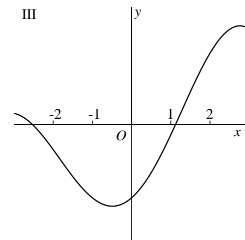


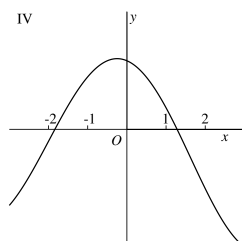


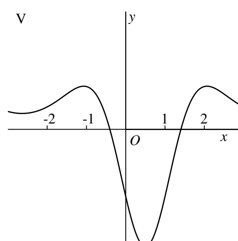
20.35 Dezelfde vraag voor de volgende grafieken. Ook hier gaat het om twee functies $f(x)$ en $g(x)$, hun afgeleiden $f'(x)$ en $g'(x)$ en hun tweede afgeleiden $f''(x)$ en $g''(x)$. Identificeer ze.

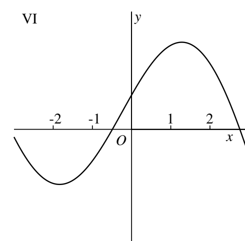




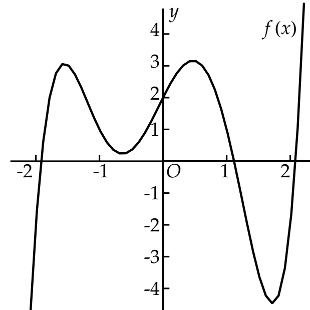




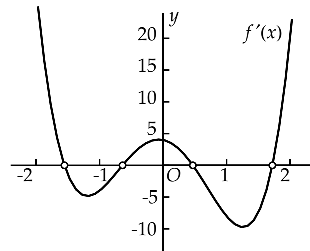




Een vijfdegraadspolynoom



Hiernaast is de grafiek getekend van het polynoom $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$. Je ziet drie nulpunten, drie waarden van x waar $f(x) = 0$ is: $x \approx -1.9$, $x \approx 1.1$ en $x \approx 2.1$. Zijn dit de enige nulpunten, of zijn er buiten het getekende interval misschien nog meer? Het gaat om een vijfdegraadspolynoom, dus het zijn er hoogstens vijf. Met behulp van de afgeleide $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 2x + 4$ zullen we nu laten zien dat $f(x)$ er in dit geval inderdaad niet meer dan drie heeft.



Hiernaast is de grafiek van die afgeleide getekend (met een andere schaalverdeling op de y-as om een hanteerbaar plaatje te krijgen). Het is een vierdegraadspolynoom, en je ziet dat $f'(x)$ het maximale aantal van vier nulpunten heeft: $x \approx -1.6$, $x \approx -0.6$, $x \approx 0.5$ en $x \approx 1.7$. Buiten die nulpunten verandert $f'(x)$ niet van teken. In het bijzonder is $f'(x) > 0$ voor alle x rechts van het grootste nulpunt en voor alle x links van het kleinste nulpunt.

Hieruit volgt dat $f'(x)$ zeker ook positief is als $x > 2.1$ of als $x < -1.9$. Dit betekent dat $f(x)$ daar een *stijgende* functie is, en dus dat $f(x)$ buiten de al gevonden drie nulpunten geen andere nulpunten heeft.

De vier nulpunten van de afgeleide $f'(x)$ zijn de punten waar de functie $f(x)$ een lokaal maximum of minimum aanneemt. 'Lokaal' wil daarbij zeggen dat het alleen maar een maximum of minimum is wanneer je je niet te ver van zo'n punt verwijdert. De algemene term die vaak voor maximum of minimum gebruikt wordt, is *extremum* of ook wel *extreme waarde*.

Wat we in het bovenstaande concrete geval voor het polynoom $f(x)$ hebben opgemerkt, geldt ook in het algemeen:

> **Stelling:** Als een functie $f(x)$ voor $x = a$ een lokaal extremum aanneemt en daar differentieerbaar is, dan is $f'(a) = 0$.

Let op: het *omgekeerde* van deze stelling is niet waar: als $f'(a) = 0$ is, hoeft $f(x)$ in a geen lokaal maximum of minimum aan te nemen, denk maar aan de functie $f(x) = x^3$, die in $x = 0$ geen maximum of minimum aanneemt, maar waarvoor wel geldt dat $f'(0) = 0$.

20.36 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van een functie $f(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

a. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $f(x)$ ook monotoon niet-dalend op I.
b. Als $f(x)$ monotoon niet-stijgend is op I, dan is $f(x)$ ook monotoon dalend op I.
c. Een functie kan niet tegelijkertijd monotoon stijgend en monotoon dalend zijn op I.
d. Een functie kan niet tegelijkertijd monotoon niet-stijgend en monotoon niet-dalend zijn op I.
e. Als $f(x)$ monotoon stijgend en differentieerbaar is op I, dan is $f'(x) > 0$ voor alle x in I.

20.37 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van een functie $f(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

a. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $g(x) = (f(x))^2$ ook monotoon stijgend op I.
b. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $g(x) = (f(x))^3$ ook monotoon stijgend op I.
c. Als $f(x)$ monotoon dalend is op I, dan is $g(x) = \mathrm{e}^{-f(x)}$ monotoon stijgend op I.
d. Als $f(x)$ monotoon niet-dalend is op I, dan is $g(x) = \arctan f(x)$ ook monotoon niet-dalend op I.

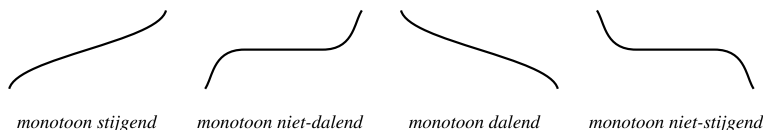
20.38 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van functies $f(x)$ en $g(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

a. Als $f(x)$ en $g(x)$ monotoon stijgend zijn op I, dan is $f(x) + g(x)$ ook monotoon stijgend op I.
b. Als $f(x)$ en $g(x)$ monotoon stijgend zijn op I, dan is $f(x) \times g(x)$ ook monotoon stijgend op I.

Stijgen, dalen en het teken van de afgeleide

We hebben in het voorbeeld van de polynoomfunctie $f(x)$ op bladzijde 173 al herhaaldelijk het verband gebruikt dat er is tussen het stijgen of dalen van een functie en het teken van de afgeleide. Om dat nader te preciseren, geven we enige definities. Stel dat een functie $f(x)$ op een interval I gegeven is.

De functie $f(x)$ heet *monotoon stijgend op* I als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) < f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon niet-dalend op* I als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) \leq f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon dalend op* I als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) > f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon niet-stijgend op* I als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Het al of niet differentieerbaar zijn van $f(x)$ speelt bij deze definities geen rol. Voor differentieerbare functies geldt de volgende stelling:

Stelling: Stel dat $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van het interval I. Dan geldt:

a. als de functie $f(x)$ monotoon niet-dalend is op het interval I, dan is $f'(x) \geq 0$ voor alle x in I,
b. als de functie $f(x)$ monotoon niet-stijgend is op het interval I, dan is $f'(x) \leq 0$ voor alle x in I,
c. als $f'(x) > 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon stijgend,
d. als $f'(x) \geq 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon niet-dalend,
e. als $f'(x) < 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon dalend,
f. als $f'(x) \leq 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon niet-stijgend,
g. als $f'(x) = 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ constant.

Het bewijs van de onderdelen (a) en (b) is niet moeilijk, dat van de andere onderdelen echter wel. We laten hier alle bewijzen achterwege.

Bepaal van de volgende functies de x-waarde van alle lokale en globale maxima en minima en geef telkens aan om wat voor soort extremum het gaat.

20.39

a. $x^3 - x$
b. $x^4 - 2x^2$
c. $x^4 - 6x^2 + 5$
d. $|x - 1|$
e. $|x^2 - 1|$

20.40

a. $\sin x$
b. $\sin x^2$
c. $\sin \sqrt{x}$
d. $\sin |x|$
e. $|\sin x|$

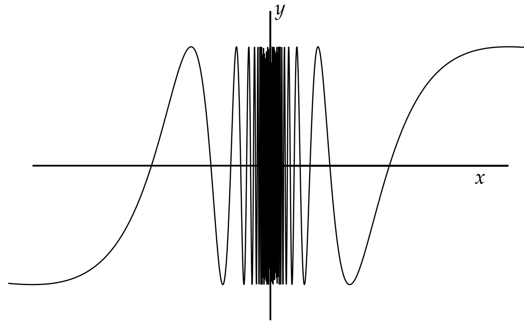
20.41

a. $x \ln x$
b. $(\ln x)^2$
c. $\arcsin x$
d. $\ln \cos x$
e. $\ln |\cos x|$

20.42

a. $x\mathrm{e}^{x}$
b. e^{-x^2}
c. $x\mathrm{e}^{-x^2}$
d. $\mathrm{e}^{\sin x}$
e. $\mathrm{e}^{-|x|}$

20.43 Hieronder is de grafiek geschetst van de functie $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$.



a. Bepaal alle nulpunten.
b. Bepaal de plaats van alle maxima en alle minima.
c. Bereken $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
d. Bestaat $\lim_{x\to 0} f(x)$? Motiveer je antwoord.

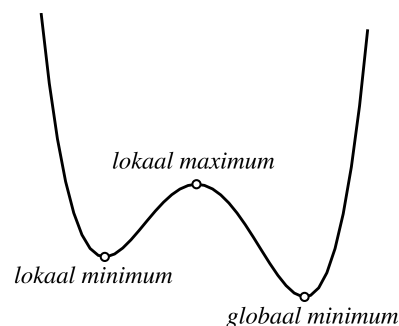
Extreme waarden

We hebben het al vaak over maxima en minima gehad, maar we hebben van deze begrippen nog geen exacte definitie gegeven. Dat doen we nu:

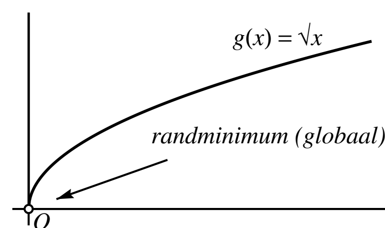
> Als geldt dat $f(x) \leq f(c)$ voor alle x uit het domein van $f(x)$, dan heet $f(c)$ het *globale maximum* van de functie. Geldt $f(x) \geq f(c)$ voor alle x uit het domein, dan heet $f(c)$ het *globale minimum*.

> Men noemt $f(c)$ een *lokaal maximum* of *lokaal minimum* van $f(x)$ als er een getal $r > 0$ bestaat zo dat voor alle x uit het domein van $f(x)$ met $|x - c| < r$ geldt dat $f(x) \leq f(c)$, respectievelijk $f(x) \geq f(c)$.

De algemene term voor minimum of maximum is *extremum* of *extreme waarde*. Een globaal maximum of minimum is ook altijd een lokaal maximum of minimum, maar het omgekeerde hoeft niet waar te zijn. Hiernaast is de grafiek van een vierdegraadspolynoom getekend met drie extremen: een lokaal minimum, een lokaal maximum en een globaal minimum, dat natuurlijk tegelijkertijd ook een lokaal minimum is. Er is geen globaal maximum.



Een term die ook vaak gebruikt wordt is *randextremum*. Dat is een extremum dat optreedt aan de rand van het domein van een functie. Neem bijvoorbeeld de functie $g(x) = \sqrt{x}$, die als domein het interval $[0, \infty)$ heeft. Het globale minimum $g(0) = 0$ treedt op voor $x = 0$, aan de rand van het domein.



Differentieerbaarheid speelt bij deze definities geen rol: zo is bijvoorbeeld het globale minimum van de functie $f(x) = |x|$ gelijk aan $f(0) = 0$, ook al is die functie daar niet differentieerbaar (zie ook bladzijde 167).

Bepaal alle stationaire punten en alle buigpunten van de volgende functies.

20.44

a. x^3

b. $x^3 - x$

c. $x^4 - x^2 - 2x + 1$

d. $x^5 + 10x^2 + 2$

e. $\dfrac{1}{1 + x^2}$

20.45

a. $\sin x$

b. $\arctan x$

c. $x^2 \ln x$

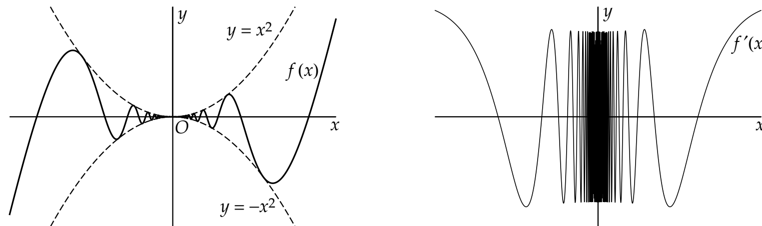
d. $x\mathrm{e}^{-x}$

e. e^{-x^2}

20.46 Hieronder zijn de grafieken getekend van de functie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{\pi}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

en de afgeleide functie $f'(x)$.



a. Laat zien dat $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ voor alle x en ga na voor welke waarden van x geldt dat $f(x) = -x^2$, respectievelijk $f(x) = x^2$.

b. Geef een formule voor $f'(x)$ als $x \neq 0$.

c. Toon aan dat $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
(Dit betekent dat $f(x)$ differentieerbaar is in $x = 0$ en dat $f'(0) = 0$.)

d. Bereken $f'(\frac{1}{2k})$ en $f'(\frac{1}{2k+1})$ voor k geheel.

e. Laat zien dat $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ niet bestaat.
(Hieruit volgt dat $f'(x)$ niet continu is in $x = 0$.)

f. Neemt $f(x)$ in $x = 0$ een lokaal minimum of maximum aan?

g. Is $x = 0$ een buigpunt van $f(x)$?

h. Zij $g(x) = f(x) + x$. Dan is $g'(0) = 1$. Is er een $c > 0$ zo, dat $g(x)$ monotoon stijgend is op het interval $(-c, c)$?

Stationaire punten en buigpunten

Als $f(x)$ differentieerbaar is in a en $f'(a) = 0$ dan is de raaklijn aan de grafiek daar horizontaal, en dus is $f(x)$ vlak in de buurt van a vrijwel constant. Men noemt zo'n punt daarom een *stationair punt*.

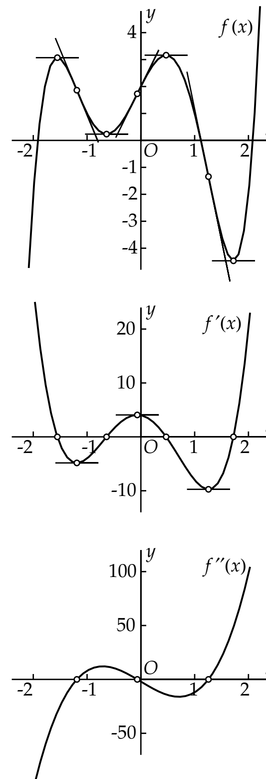
Als $f'(a) = 0$ heet a een *stationair punt* van $f(x)$.

Lokale extrema van differentieerbare functies treden op in stationaire punten, maar een stationair punt hoeft nog niet een lokaal maximum of minimum op te leveren, zoals de functie $f(x) = x^3$ laat zien (zie ook pagina 173).

Ook de lokale extrema van de afgeleide functie $f'(x)$ zijn bijzondere punten van de oorspronkelijke functie $f(x)$. Het zijn de *buigpunten*.

Als $f(x)$ een differentieerbare functie is, dan heet elk punt waar de afgeleide $f'(x)$ een lokaal minimum of maximum aanneemt een *buigpunt* van de functie $f(x)$.

Hiernaast is als voorbeeld weer de grafiek van de functie $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$ getekend, samen met de grafiek van de afgeleide $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 2x + 4$ en de grafiek van de tweede afgeleide $f''(x) = 20x^3 - 30x - 2$.
In de grafieken hebben we de lokale maxima en minima van $f(x)$ en $f'(x)$ aangegeven met de bijbehorende horizontale raaklijnen. Tevens zijn de raaklijnen getekend in de buigpunten van $f(x)$, dat wil zeggen de punten waar $f'(x)$ een lokaal maximum of minimum aanneemt. Omdat $f'(x)$ ook weer een differentieerbare functie is, geldt in die punten dus $f''(x) = 0$.
Je ziet dat de grafiek van $f(x)$ in de buigpunten de buigraaklijn doorsnijdt, en ook dat de 'bolling' van de grafiek daar als het ware omklapt. Dat correspondeert ermee dat $f''(x)$ in die punten van teken wisselt. Als $f''(x) > 0$ is, is $f'(x)$ een stijgende functie, en dan neemt de helling van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ dus toe. Als $f''(x) < 0$ is, dan is $f'(x)$ een dalende functie, en dan neemt de helling van de raaklijn dus af.



21. Differentialen en integralen

Schrijf de volgende differentialen in de vorm $f'(x)\,dx$.

21.1

a. $d(3x^2 + 2x + 2)$

b. $d(x + \sin 2x + 9)$

c. $d(4x^2 \sin(x+1))$

d. $d(x^3\sqrt{x^3+1})$

e. $d(\cos(x^2) + 5)$

21.2

a. $d(\ln(x^2+1))$

b. $d(2 - \mathrm{e}^{-x^2})$

c. $d(\mathrm{e}^{\cos x})$

d. $d\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

21.3

a. $d\left(5x^3 + \dfrac{3}{x^2+1}\right)$

b. $d(x+4)^4$

c. $d((x^4-1)\sin 2x)$

d. $d(\sqrt[4]{x+1})$

e. $d(\tan(x+5))$

21.4

a. $d(x^{2/3} + x^{-2/3})$

b. $d(x - \ln(x^2+1))$

c. $d(\mathrm{e}^{-\sin 2x})$

d. $d\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

Schrijf de volgende differentialen in de vorm $d(f(x))$.

21.5

a. $(3x^2 + 2x + 2)\,dx$

b. $(x - \sqrt{x})\,dx$

c. $(x^4 - 4x^3 + 2x - 5)\,dx$

d. $\sqrt{x+1}\,dx$

e. $\left(\dfrac{1}{x}\right)\,dx \quad (x > 0)$

21.6

a. $\sqrt[3]{x}\,dx$

b. $(3 + x + \sin 2x)\,dx$

c. $\sin(x+1)\,dx$

d. $\cos(2x+1)\,dx$

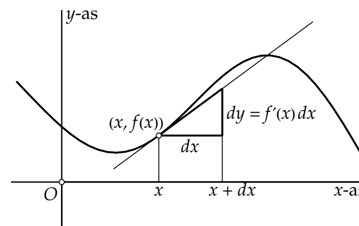
e. $\left(\dfrac{1}{x}\right)\,dx \quad (x < 0)$

Differentialen – definitie en rekenregels

Stel dat de functie $y = f(x)$ differentieerbaar is in het punt x. Voor een kleine toename dx van x is het functiewaardenverschil $f(x + dx) - f(x)$ dan bij benadering gelijk aan $f'(x)\,dx$, en die benadering is beter naarmate dx kleiner is. Men noemt $f'(x)\,dx$ de *differentiaal* van f en gebruikt hiervoor de notaties dy, df of $d(f(x))$. Kort gezegd:

$$\boxed{\text{Als } y = f(x) \text{ dan is } dy = f'(x)\,dx.}$$

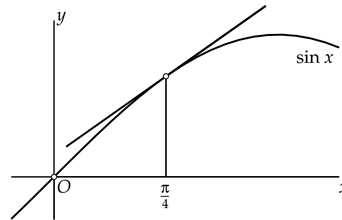
Enerzijds hangt de differentiaal dus af van de keuze van het punt x en anderzijds ook van de toename dx. Bij gegeven x kun je de differentiaal dy zien als de toename van y die correspondeert met een toename dx van x na *linearisatie* van de functie. Bij dit alles moet het woord 'toename' ruim worden opgevat: dx en dy kunnen natuurlijk zowel positief als negatief zijn.



Het achterliggende idee bij dit alles is weer dat de grafiek van een differentieerbare functie praktisch gezien een rechte lijn is als je maar voldoende diep inzoomt. Die lijn is de raaklijn aan de grafiek in het punt waarop je inzoomt. Neem bijvoorbeeld $f(x) = \sin x$. Volgens de bovenstaande definitie is

$$d(\sin x) = \cos x\,dx.$$

Als we $x = \frac{\pi}{4}$ en $dx = \frac{1}{100}$ kiezen, dan is $dy = f'(x)\,dx = \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{100} = \frac{1}{200}\sqrt{2} \approx 0.007071$. Inderdaad is dit een goede benadering van $f(x+dx) - f(x)$ want $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{100}) - \sin\frac{\pi}{4} \approx 0.007036$.



Voor differentialen gelden de volgende rekenregels. In feite zijn het de bekende rekenregels voor het differentiëren, vertaald in termen van differentialen.

$$\begin{aligned}
d(c\,f(x)) &= c\;d(f(x)) \quad \text{voor elke constante } c \\
d(f(x) + g(x)) &= d(f(x)) + d(g(x)) \\
d(f(x)\,g(x)) &= g(x)\,d(f(x)) + f(x)\,d(g(x)) \quad \text{(productregel)} \\
d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{g(x)\,d(f(x)) - f(x)\,d(g(x))}{(g(x))^2} \quad \text{(quotiëntregel)} \\
d(f(g(x))) &= f'(g(x))\,d(g(x)) \;=\; f'(g(x))\,g'(x)\,dx \quad \text{(kettingregel).}
\end{aligned}$$

21.7 In de volgende gevallen zijn een meetwaarde x_m, een bovengrens h voor de meetfout en een differentieerbare functie $f(x)$ gegeven. Bereken $f(x_m)$ en geef met behulp van de differentiaal een bovengrens k voor de fout in die berekening. Je mag hierbij je rekenmachine gebruiken. Rond k naar boven af op een naar jouw mening redelijk aantal decimalen (dat niet voor elk onderdeel hetzelfde hoeft te zijn).

a. $x_m = 2.124$, $f(x) = 1 + x^2$, $h = 0.01$
b. $x_m = 0.2124$, $f(x) = 1 + x^2$, $h = 0.001$
c. $x_m = 1.284$, $f(x) = 1 - x^2$, $h = 0.003$
d. $x_m = 12.84$, $f(x) = 1 - x^2$, $h = 0.03$
e. $x_m = 8.372$, $f(x) = \sin x$, $h = 0.01$
f. $x_m = 0.672$, $f(x) = \tan 2x$, $h = 0.005$
g. $x_m = 0.4394$, $f(x) = \ln x$, $h = 0.001$
h. $x_m = 4.394$, $f(x) = \ln x$, $h = 0.01$
i. $x_m = 43.94$, $f(x) = \ln x$, $h = 0.1$
j. $x_m = 2.984$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $h = 0.01$

21.8 Je kunt de foutenschattingen $k = |f'(x_m)|\,h$ die je in de bovenstaande opgave berekend hebt, toetsen door telkens ook $f(x_m + h)$ en $f(x_m - h)$ uit te rekenen. Het verschil zal ongeveer $2k$ moeten zijn. Ga dit in een aantal gevallen na met behulp van je rekenmachine.

21.9 Als x_m een gemeten waarde en x_w de werkelijke waarde van een grootheid x zijn, heet de uitdrukking $|x_w - x_m|$ de *absolute fout* en het quotiënt $\frac{|x_w - x_m|}{|x_w|}$ de *relatieve fout*. Omdat we x_w meestal niet kennen, moeten we ons tevredenstellen met schattingen. Als h een schatting is voor de maximale absolute fout, neemt men meestal het quotiënt $q = \frac{h}{|x_m|}$ als schatting voor de maximale relatieve fout. Geef een verklaring voor de volgende vaak gehanteerde vuistregels, waarbij h_x, q_x, h_y, q_y schattingen voor de maximale absolute en relatieve fouten in metingen x_m respectievelijk y_m zijn.

a. $h_x + h_y$ is een schatting voor de maximale absolute fout in $x_m + y_m$.
b. $h_x + h_y$ is een schatting voor de maximale absolute fout in $x_m - y_m$.
c. $q_x + q_y$ is een schatting voor de maximale relatieve fout in $x_m y_m$.
d. $q_x + q_y$ is een schatting voor de maximale relatieve fout in $\dfrac{x_m}{y_m}$.

Foutenschattingen

Differentialen worden vaak gebruikt bij foutenschattingen. Stel dat x_m de gemeten waarde van een grootheid x is, en dat de (kleine) fout in de meting geschat wordt op maximaal h. We verwachten dus dat de onbekende werkelijke waarde x_w van x voldoet aan $|x_w - x_m| < h$.

Stel vervolgens dat we niet x zelf, maar een functiewaarde $f(x)$ nodig hebben. We berekenen dan $f(x_m)$, maar willen eigenlijk $f(x_w)$ weten. Kunnen we nu een redelijke bovengrens k geven voor de fout $f(x_w) - f(x_m)$ die we dan maken?

Stel $x_w = x_m + dx$. Als dx klein is, geldt

$$f(x_w) - f(x_m) = f(x_m + dx) - f(x_m) \approx f'(x_m)\,dx.$$

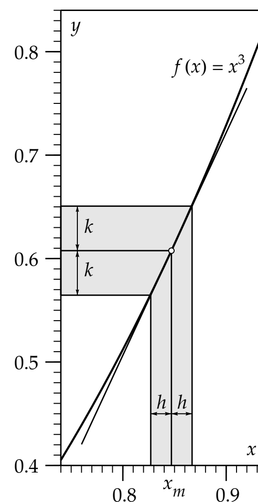
Omdat we aangenomen hebben dat $|dx| < h$ is, is $k = |f'(x_m)|\,h$ een goede schatting voor de maximale fout als we $f(x_m)$ als benadering nemen voor de onbekende functiewaarde $f(x_w)$.

Stel bijvoorbeeld dat $x_m = 0.847$ en $f(x) = x^3$ en stel dat we $h = 0.02$ kunnen nemen. Dan is $f(x_m) = (0.847)^3 = 0.607645423$ en $f'(x_m) = 3(x_m)^2 = 3(0.847)^2 = 2.152227$ dus $k = f'(x_m)\,h = 0.04304454$. Een redelijke foutenschatting is dus $|f(x_w) - f(x_m)| < 0.044$, of, direct uitgedrukt in termen van de gezochte (onbekende) waarde $f(x_w)$,

$$0.563 < f(x_w) < 0.651.$$

Enigszins slordig gezegd:

> *Bij de berekening van een functiewaarde $f(x_m)$ van een meetresultaat x_m wordt de onnauwkeurigheid in x_m vermenigvuldigd met de absolute waarde van de afgeleide $f'(x_m)$.*



Ook hier komt het er weer op neer dat je de functie *lineariseert*, dat wil zeggen dat je de grafiek ervan vervangt door de raaklijn ter plaatse. Een kleine afgeleide impliceert dat de onnauwkeurigheid afneemt, een grote afgeleide betekent dat de onnauwkeurigheid toeneemt. Voorwaarde is natuurlijk wel dat h klein is en dat $f(x)$ differentieerbaar is in x_m.

21.10 Hieronder zijn telkens een punt x en een functie $f(x)$ gegeven. Maak met behulp van je rekenmachine een soortgelijke tabel als die op de volgende bladzijde; neem voor dx steeds de waarden $dx = 0.1$, $dx = 0.01$, $dx = 0.001$ en $dx = 0.0001$.

a. $x = 2$, $f(x) = 1 + x^2$
b. $x = 1$, $f(x) = \ln x$
c. $x = \frac{1}{4}\pi$, $f(x) = \tan x$
d. $x = 2$, $f(x) = \arctan x$
e. $x = 0$, $f(x) = \cos x$
f. $x = 0$, $f(x) = \sin x$ (verklaar wat je hierbij opmerkt!).

Hoe goed is de differentiaal als benadering?

De differentiaal $dy = f'(x)\,dx$ is voor kleine dx een goede benadering van het functiewaardenverschil $\Delta f = f(x + dx) - f(x)$. Hoe goed? Dat hangt af van de functie $y = f(x)$, het punt x en de toename dx.

We richten ons hier op de afhankelijkheid van dx bij een vast gekozen x. De fout die je maakt als je het verschil $\Delta f = f(x + dx) - f(x)$ vervangt door de differentiaal $df = f'(x)dx$, ligt voor 'nette' functies[1] in de orde van grootte van $(dx)^2$. Er geldt namelijk dat

$$\Delta f - df = (f(x + dx) - f(x)) - f'(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\,f''(x)\,(dx)^2$$

als dx klein is. Bedenk hierbij dat voor kleine dx het kwadraat $(dx)^2$ nog veel kleiner is dan dx zelf. Wanneer bijvoorbeeld $dx = 0.01$ dan is $(dx)^2 = 0.0001$. Het verschil tussen Δf en de differentiaal df gaat dus 'veel sneller naar nul' dan dx zelf wanneer dx naar nul gaat.

Een bewijs van het bovenstaande valt buiten het bestek van dit boek. We illustreren het slechts in een tabel waarin we weer $f(x) = \sin x$ en $x = \frac{1}{4}\pi$ nemen, en voor dx achtereenvolgens $dx = 0.1$, $dx = 0.01$, $dx = 0.001$ en $dx = 0.0001$ substitueren.

dx	$df = f'(x)\,dx$	Δf	$\Delta f - df$	$\frac{1}{2}\,f''(x)\,(dx)^2$
0.1	0.0707106781	0.0670603	−0.0036504	−0.0035355
0.01	0.00707106781	0.007035595	−0.000035473	−0.000035355
0.001	0.000707106781	0.00070675311	−0.00000035367	−0.00000035355
0.0001	0.0000707106781	0.0000707071425	−0.0000000035357	−0.0000000035355

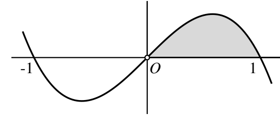
Je ziet: als dx *tien* maal zo klein wordt, dan wordt $\Delta f - df$ (vierde kolom) ongeveer *honderd* maal zo klein! Merk ook op dat dit verschil naarmate dx kleiner wordt, inderdaad steeds beter gaat lijken op $\frac{1}{2}\,f''(x)\,(dx)^2$ (vijfde kolom).

Voor later gebruik vermelden we nog dat we het verschil $\Delta f - df$ kunnen afschatten wanneer we een bovengrens M kennen voor $|f''(x)|$ op het interval waarop we werken. Dan geldt namelijk

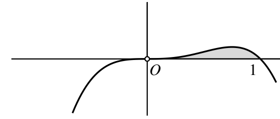
$$|\Delta f - df| \leq \frac{1}{2}M|dx|^2.$$

In het gegeven voorbeeld met $f(x) = \sin x$ is $f''(x) = -\sin x$. We kunnen dan $M = 1$ nemen. Controleer zelf dat aan deze afschatting voldaan is in de vierde kolom van de tabel.

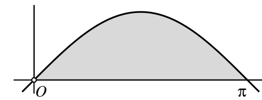
[1] De functie $f(x)$ noemen we in dit verband een 'nette' functie als $f''(x)$ bestaat en continu is in de buurt van x.



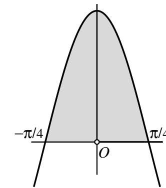
21.11 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = x - x^3$ tussen de punten $(0, 0)$ en $(1, 0)$.



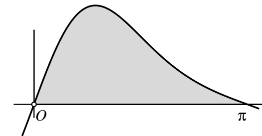
21.12 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - x^4$ tussen de punten $(-1, 0)$ en $(0, 0)$.



21.13 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de x-as en de grafiek van $f(x) = \sin x$ tussen de punten $(0, 0)$ en $(\pi, 0)$.



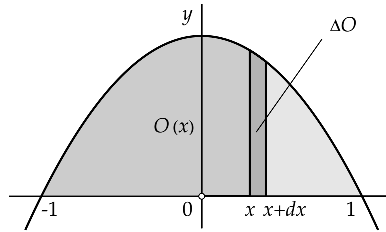
21.14 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = 2\cos 2x$ tussen de punten $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ en $(\frac{\pi}{4}, 0)$.



21.15 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = (\sin x)\,\mathrm{e}^{\cos x}$ tussen de punten $(0, 0)$ en $(\pi, 0)$.

Een oppervlakteberekening

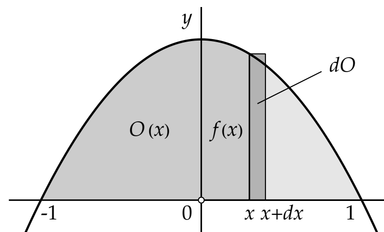
Stel dat gevraagd wordt de oppervlakte te berekenen van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de x-as en de grafiek van $f(x) = 1 - x^2$ tussen de punten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$. Dat kan op de volgende manier.
Kies een getal x tussen -1 en 1, en noem de oppervlakte van het deel van V dat zich links van de verticale lijn door $(x, 0)$ bevindt $O(x)$.



Zodra we een formule voor $O(x)$ als functie van x kennen, kennen we ook de oppervlakte van V, want die is gelijk aan $O(1)$.

Voor kleine positieve dx is de toename $O(x + dx) - O(x)$, die we kortweg met ΔO zullen aanduiden, gelijk aan de oppervlakte van de smalle strook van V die ligt tussen de verticale lijnen door de punten $(x, 0)$ en $(x + dx, 0)$.

Die strook valt vrijwel samen met de hiernaast getekende smalle rechthoek met basis dx en hoogte $f(x) = 1 - x^2$. De oppervlakte van die rechthoek is gelijk aan $f(x) \times dx = (1 - x^2)\,dx$. Naarmate dx kleiner gekozen wordt, wordt de gelijkenis beter, en dat leidt tot het idee dat $(1 - x^2)\,dx$ niets anders is dan de differentiaal van de gezochte functie $O(x)$.



Men kan aantonen dat dit inderdaad het geval is, met andere woorden, dat $dO = (1 - x^2)dx$. De afgeleide van de functie $O(x)$ is dus $1 - x^2$, en daarom is $O(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + c$ voor zekere constante c. Omdat $O(-1) = 0$ (want voor $x = -1$ is de oppervlakte nul) moet $c = \frac{2}{3}$ zijn, dus $O(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$. De gevraagde oppervlakte van V is dus gelijk aan $O(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

21.16 Bereken de oppervlakte onder de grafiek van de aangegeven functie $f(x)$ tussen de lijnen $x = a$ en $x = b$. Maak zelf ter oriëntatie een ruwe schets van de grafiek van $f(x)$.

a. $f(x) = 1 + x^2$ $\quad a = -1, \quad b = 1$
b. $f(x) = x^3 + x^2$ $\quad a = 0, \quad b = 2$
c. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ $\quad a = 0, \quad b = 1$
d. $f(x) = 2 + \cos x$ $\quad a = 0, \quad b = \pi$
e. $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ $\quad a = -1, \quad b = 1$
f. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ $\quad a = 1, \quad b = 4$
g. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad a = 1, \quad b = \mathrm{e}$
h. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $\quad a = -1, \quad b = 1$

Bereken de volgende integralen. Maak ook telkens weer ter oriëntatie een ruwe schets van de grafiek van de integrand.

21.17

a. $\displaystyle\int_0^2 (2x + x^3 + 1)\,dx$
b. $\displaystyle\int_1^4 (x + \sqrt{x})\,dx$
c. $\displaystyle\int_0^1 (1 + x^{-\frac{3}{4}})\,dx$
d. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sin x)\,dx$

21.18

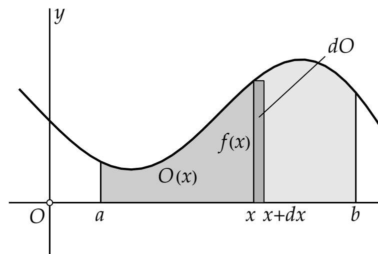
a. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-2x}\,dx$
b. $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})\,dx$
c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$
d. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

Oppervlakte en primitieve functie

Als $F'(x) = f(x)$ voor alle x uit een interval I, heet $F(x)$ een *primitieve functie* van $f(x)$ op I. Zo'n primitieve functie is niet uniek bepaald: voor elke constante c is $G(x) = F(x) + c$ ook een primitieve functie van $f(x)$ en *elke* primitieve functie van $f(x)$ op I is van deze vorm. Primitieve functies zijn dus tot op een constante na bepaald: kennen we er één, dan kennen we ze allemaal.

Wat we op bladzijde 187 gedaan hebben voor de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x) = 1 - x^2$, kunnen we nu herhalen voor een willekeurige functie f die op $[a, b]$ continu en niet-negatief is.

Kies een x tussen a en b. De oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ tussen de verticale lijnen door $(a, 0)$ en $(x, 0)$ noemen we $O(x)$. Net als in het geval van de functie van bladzijde 187 kan men aantonen dat de differentiaal dO gelijk is aan $f(x)\,dx$ (bij het bewijs wordt de continuïteit van $f(x)$ gebruikt). Dat betekent dat $O'(x) = f(x)$, met andere woorden, dat $O(x)$ een primitieve functie van $f(x)$ op $[a, b]$ is.



Stel nu dat $F(x)$ een willekeurige andere primitieve functie is van $f(x)$. Dan is er een constante c waarvoor $F(x) = O(x) + c$. Omdat $O(a) = 0$ is, geldt $F(a) = c$, dus $O(x) = F(x) - F(a)$. In het bijzonder is $O(b) = F(b) - F(a)$.

Het getal $F(b) - F(a)$ heet de *integraal* van $f(x)$ over het interval $[a, b]$, notatie

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

De functie $f(x)$ heet de *integrand*. Het teken $\int$ dat voor de differentiaal $f(x)\,dx$ staat, heet het *integraalteken*. Het is bedacht door G.W. Leibniz, een van de 'uitvinders' van de differentiaal- en integraalrekening. Van oorsprong is het een langgerekte letter 'S', de eerste letter van het latijnse woord *summa* dat som betekent. Later zullen we nader ingaan op het verband tussen sommeren en integreren.

Overigens, de *integratievariabele* x kan door iedere andere letter worden vervangen, tenzij zo'n letter al een andere betekenis heeft. Het is een 'dummy variabele', vergelijkbaar met de sommatie-index in een somformule.

Bereken de volgende integralen:

21.19

a. $\displaystyle\int_0^2 (x^4 - 5x^3 - 1)\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^2 (x - \sqrt{x})\,dx$

c. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\,dx$

d. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$

e. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$

21.20

a. $\displaystyle\int_{-2}^2 (3x^2 - 2x^3)\,dx$

b. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt[5]{x}\,dx$

c. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x - \mathrm{e}^{-x}\right)\,dx$

d. $\displaystyle\int_{-\pi}^0 (x + \sin x)\,dx$

e. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx$

21.21

a. $\displaystyle\int_0^2 2^x\,dx$

b. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{x-1}\,dx$

c. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\,dx$

d. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2x\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^1 \cos \pi x\,dx$

21.22

a. $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x+2}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^{-2} \frac{1}{1-2x+x^2}\,dx$

d. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

e. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

Bereken:

21.23

a. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x t^2\,dt$

b. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-5}^x t^2\,dt$

c. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^3 t^2\,dt$

d. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x}^x t^2\,dt$

21.24

a. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^0 \sin t\,dt$

b. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x}^0 \sin t\,dt$

c. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{2x} \cos t\,dt$

d. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos t\,dt$

Integralen – algemene definitie en rekenregels

Stel dat $F(x)$ een primitieve functie is van de functie $f(x)$ op een interval I. Zo'n primitieve functie is tot op een constante na bepaald door $f(x)$. Voor willekeurige punten a en b in I is het functiewaardenverschil $F(b) - F(a)$ dan *onafhankelijk* van de keuze van de primitieve. Dat verschil heet de *integraal* van $f(x)$, met *ondergrens* a en *bovengrens* b, notatie $\int_a^b f(x)\,dx$. Voor $F(b) - F(a)$ wordt ook vaak de korte notatie $[F(x)]_a^b$ gebruikt, dus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Deze integraaldefinitie is een uitbreiding van de integraaldefinitie op bladzijde 189 die zich beperkte tot het geval dat $a < b$ en dat $f(x)$ continu en niet-negatief is op $[a, b]$. We hebben daar laten zien dat de oppervlaktefunctie $O(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ een primitieve functie van $f(x)$ is en dat voor iedere andere primitieve functie $F(x)$ geldt dat $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$.

Uit de algemenere integraaldefinitie volgen direct de volgende eigenschappen:

a. $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ voor elke constante c.

b. $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

c. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

d. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ voor alle $a, b, c \in I$.

e. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ en $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)$.

Eigenschap (e.) laat zien wat er gebeurt als je een integraal differentieert naar zijn boven- of ondergrens. Omdat we hier de letter x in een van de grenzen gebruiken, moeten we een andere letter als integratievariabele kiezen.

Voor de hand liggende vragen zijn nu: heeft elke functie $f(x)$ primitieve functies? En: als een functie primitieve functies heeft, hoe kun je die dan vinden? Op de eerste vraag is het antwoord nee. Er zijn functies die geen primitieve functie hebben. Maar in de volgende sectie zullen we zien dat er wel altijd primitieve functies zijn indien $f(x)$ *continu* is. Aan het beantwoorden van de tweede vraag is het volgende hoofdstuk gewijd.

21.25

a. Laat aan de hand van de grafieken van $\sin x$ en $\cos x$ zien dat

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0.$$

b. Schets de grafieken van $\sin^2 x$ en $\cos^2 x$ en laat zien dat ze op een horizontale verschuiving na aan elkaar gelijk zijn.

c. Leid hieruit af dat

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx.$$

d. Bereken nu met behulp van de relatie $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ deze beide integralen.

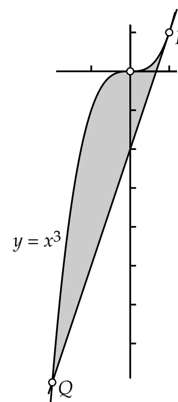
e. Bereken ook de integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx \quad \text{en} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx.$$

21.26 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de volgende krommen. Maak daartoe eerst een (ruwe) schets van de situatie en gebruik vervolgens dat $\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.

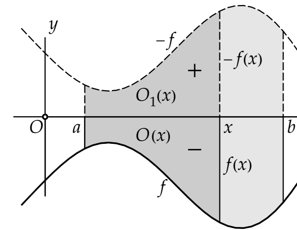
a. De parabool $y = x^2$ en de parabool $y = 1 - x^2$.
b. De parabool $y = x^2 - 2$ en de lijn $y = x$.
c. De grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^3$.
d. De grafieken van de functies $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ en $g(x) = x^2 - 1$.
e. De grafiek van de functie $f(x) = \mathrm{e}^{\,x}$, de y-as en de lijn $y = \mathrm{e}$.

21.27 Op de grafiek van de functie $f(x) = x^3$ ligt het punt $P = (1, 1)$. De raaklijn in P snijdt de grafiek van $f(x)$ in een punt Q dat niet met P samenvalt. Bereken de coördinaten van het punt Q en bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x)$ en het lijnstuk PQ.

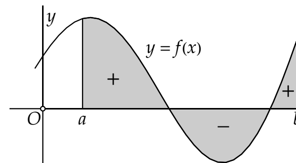


Nogmaals het verband tussen oppervlakte en integraal

Stel dat $f(x)$ continu is op het interval $[a, b]$. Als $f(x) \geq 0$ is op $[a, b]$, dan is, zoals we al op bladzijde 189 hebben gezien, de functie $O(x)$, die de oppervlakte onder de grafiek van f op het interval $[a, x]$ voorstelt, een primitieve functie van $f(x)$.



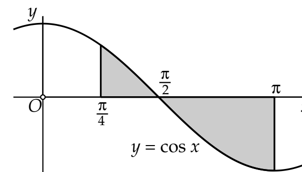
Als $f(x) \leq 0$ is op $[a, b]$ dan is $-f(x) \geq 0$, en dus is de (niet-negatieve) functie $O_1(x)$ die de oppervlakte onder de grafiek van $-f(x)$ op $[a, x]$ voorstelt, dan een primitieve functie van $-f(x)$. Een primitieve functie van $f(x)$ is dus $O(x) = -O_1(x)$. Dit is tevens de oppervlakte op $[a, x]$ tussen de grafiek van f en de horizontale as, maar dan voorzien van een minteken.



Als $f(x)$ op $[a, b]$ van teken wisselt, moeten we positieve en negatieve bijdragen met elkaar combineren. In de oppervlaktefunctie $O(x)$ worden de oppervlaktes van de vlakdelen waar $f(x) \leq 0$ is, dan met een minteken geteld. In de hiernaast getekende situatie zijn er op $[a, b]$ twee vlakdelen die een positieve bijdrage leveren en één vlakdeel dat negatief bijdraagt.

In alle gevallen is $O(x)$ dus een primitieve functie van $f(x)$. Elke andere primitieve $F(x)$ is dan van de vorm $F(x) = O(x) + c$. Omdat $O(a) = 0$ is, is $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = O(b) - O(a) = O(b)$. Maar $O(b)$ is ook de 'oppervlakte' tussen de grafiek van $f(x)$ en de horizontale as, en dus geldt:

> *De integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ is gelijk aan de oppervlakte tussen de grafiek, de horizontale as en de verticale lijnen door a en b, waarbij de oppervlakte van de vlakdelen onder de horizontale as negatief geteld moet worden.*



Voorbeeld: neem $f(x) = \cos x$ op $[\frac{\pi}{4}, \pi]$. Dan is $F(x) = \sin x$ een primitieve functie, dus

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos x\,dx = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Schrijf de volgende onbepaalde integralen in de vorm $F(x) + c$.

21.28

a. $\int (x^5 + 3x^3 - 2x + 7)\, dx$

b. $\int (4x^3 - 2x^2 + x + 1)\, dx$

c. $\int (3 - 2x^3)\, dx$

d. $\int (x - \frac{2}{x^2})\, dx$

e. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx$

f. $\int \sqrt[3]{x - 1}\, dx$

g. $\int \sin(3x)\, dx$

21.29

a. $\int \sin^2 x\, dx$

b. $\int \cos^2 x\, dx$

c. $\int \sin^2 5x\, dx$

d. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$

e. $\int \sin x \cos 5x\, dx$

f. $\int \cos 3x \cos 2x\, dx$

g. $\int \sin 2x \sin 4x\, dx$

21.30 In de *Fourieranalyse* (een tak van wiskunde die tal van toepassingen kent, onder andere in de signaaltheorie) spelen de volgende resultaten een belangrijke rol. Daarbij zijn m en n positieve gehele getallen met $m \neq n$. Bewijs ze met behulp van geschikt gekozen gonioformules.

a. $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0$

b. $\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0$

c. $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$

d. $\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi$

e. $\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi$

Onbepaalde integralen

Als $F(x)$ op het interval I een primitieve functie is van $f(x)$, geldt voor iedere a en iedere x in I dat
$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt.$$
Elke primitieve functie van $f(x)$ op I is op deze manier te schrijven. Men geeft zo'n primitieve functie van $f(x)$ vaak aan met de notatie
$$\int f(x)dx$$
(dus zonder integratiegrenzen) en spreekt dan over een *onbepaalde integraal* van $f(x)$. Elke andere primitieve functie op I krijg je dan door er een constante bij op te tellen.

Voorbeeld, met $I = \langle -\infty, \infty \rangle$:
$$\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + c.$$
Hierbij geeft elke keuze van de zogenaamde *integratieconstante* c een primitieve functie van $f(x) = x^5$. Veel computeralgebrapakketten geven als uitkomst van een onbepaalde integraal slechts één primitieve functie, dus zonder er een integratieconstante c bij te vermelden.

Beschrijf *alle* primitieve functies van de volgende functies.

21.31

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$

d. $f(x) = \dfrac{4}{2-3x}$

e. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

f. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$

21.32

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|2-x|}}$

e. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

f. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 \pi x}$

De primitieve functies van $f(x) = \frac{1}{x}$

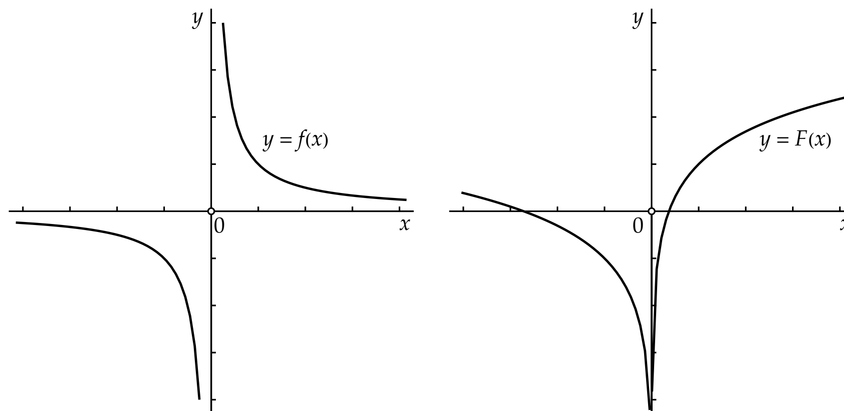
Het domein van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ valt in twee intervallen uiteen: $\langle -\infty, 0\rangle$ en $\langle 0, \infty\rangle$. Op het interval $\langle 0, \infty\rangle$ is $F(x) = \ln x$ een primitieve functie, op $\langle -\infty, 0\rangle$ is $F(x) = \ln(-x)$ een primitieve functie, want volgens de kettingregel is $\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$. We kunnen de beide formules voor $F(x)$ combineren tot $F(x) = \ln|x|$, want $|x| = x$ als $x > 0$ en $|x| = -x$ als $x < 0$. Andere primitieve functies zijn $\ln|x| + c$ voor een willekeurige constante c. Maar daarmee hebben we *niet* alle primitieve functies beschreven, want de integratieconstante op $\langle -\infty, 0\rangle$ hoeft niet dezelfde te zijn als die op $\langle 0, \infty\rangle$. Strikt genomen is het dus niet juist om te stellen dat

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

zoals men vaak ziet. Een primitieve functie die hier niet onder valt, is bijvoorbeeld

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{als} \quad x > 0 \\ \ln(-x) - 1 & \text{als} \quad x < 0. \end{cases}$$

Hieronder zijn de grafieken van $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en deze primitieve functie $F(x)$ getekend.



Hetzelfde verschijnsel doet zich voor bij alle functies $f(x)$ waarvan het domein in verschillende deelintervallen uiteenvalt, bijvoorbeeld omdat er verticale asymptoten optreden.

22. Integratietechnieken

Bereken de volgende integralen met behulp van de substitutieregel. Raadpleeg zo nodig ook de voorbeelden op bladzijde 201. Werk met expliciete substituties of met behulp van de techniek van het 'achter de *d* brengen'. Schrijf daarbij ook alle tussenstappen op, net als in de gegeven voorbeelden.

22.1

a. $\int_0^1 (1+x)^9 \, dx$

b. $\int_{-1}^1 (2+3x)^5 \, dx$

c. $\int_0^2 (3-x)^6 \, dx$

d. $\int_{-1}^0 (5-2x)^5 \, dx$

e. $\int_0^1 (4-3x)^4 \, dx$

f. $\int_{-2}^2 (2+x)^3 \, dx$

22.2

a. $\int_0^1 x(1+x)^9 \, dx$

b. $\int_0^1 x(1-x)^4 \, dx$

c. $\int_{-1}^0 x(2x+3)^5 \, dx$

d. $\int_{-1}^1 x(1-x^2)^7 \, dx$

e. $\int_0^1 x(1+x^2)^8 \, dx$

f. $\int_0^1 (x+1)(2x+x^2)^3 \, dx$

22.3

a. $\int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx$

b. $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{x+2} \, dx$

c. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x}{1-2x} \, dx$

d. $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} \, dx$

e. $\int_0^1 \frac{x}{4-x^2} \, dx$

f. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1+4x^2} \, dx$

22.4

a. $\int_0^5 x\sqrt{x+4} \, dx$

b. $\int_1^2 x\sqrt[3]{x-1} \, dx$

c. $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+1} \, dx$

d. $\int_2^6 x\sqrt{2x-3} \, dx$

e. $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$

f. $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x}} \, dx$

De substitutieregel

Stel dat $\frac{d}{dy}F(y) = f(y)$. Dan is $d(F(y)) = f(y)dy$. Als we hierin $y = g(x)$ substitueren, krijgen we

$$d(F(g(x)) = f(g(x))d(g(x)) = f(g(x))g'(x)\,dx.$$

De laatste stap komt neer op het 'achter de d vandaan halen' van $g(x)$ via de bekende regel voor differentialen $d(g(x)) = g'(x)dx$.

We vertalen dit alles in termen van integralen, waarbij we de volgorde omkeren omdat we deze regel vooral willen gebruiken om integralen uit te rekenen. Het gaat er dan niet om iets 'achter de d vandaan te halen' maar juist om iets 'achter de d te brengen', natuurlijk met behulp van dezelfde eigenschap $d(g(x)) = g'(x)dx$, maar dan andersom gelezen.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \int_a^b f(g(x))d(g(x)) = \int_a^b d(F(g(x)))\\ &= \big[F(g(x))\big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).\end{aligned}$$

Deze regel staat bekend als de *substitutieregel* voor integralen. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos x\, \mathrm{e}^{\sin x}dx &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\sin x}d(\sin x) = \int_0^{\pi/2} d(\mathrm{e}^{\sin x})\\ &= \big[\mathrm{e}^{\sin x}\big]_0^{\pi/2} = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1.\end{aligned}$$

In dit geval is dus $F(y) = \mathrm{e}^y$ en $g(x) = \sin x$.

Soms kan het handig zijn om een substitutie expliciet uit te voeren, en dus op een nieuwe variabele over te gaan. Ook de integratiegrenzen moeten dan worden meegenomen. In het volgende voorbeeld maken we gebruik van de substitutie $x = 2\sin t$. Bedenk dat dan geldt dat $dx = 2\cos t\,dt$ en $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t$.

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}dx &= \int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{1}{2\cos t}\,2\cos t\,dt\\ &= \int_{t=0}^{t=\pi/2} dt = \big[\,t\,\big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Bereken de volgende integralen met behulp van de substitutieregel.

22.5

a. $\int_0^{\pi} \cos \frac{1}{3}x \, dx$

b. $\int_{-1}^{0} \sin \pi x \, dx$

c. $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos x^3 \, dx$

d. $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \cos x \, dx$

e. $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x \cos^2 x \, dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x \, dx$

22.6

a. $\int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx$

b. $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \cos x \sqrt{1 + \sin x} \, dx$

c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \tan \frac{x}{2} \, dx$

d. $\int_0^{\pi} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

e. $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos x \, \sin(\sin x) \, dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} \, dx$

22.7

a. $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2x+1} \, dx$

b. $\int_0^{1} x\mathrm{e}^{x^2} \, dx$

c. $\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-x^2} \, dx$

d. $\int_0^{1} x^2\mathrm{e}^{x^3} \, dx$

e. $\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}} \, dx$

f. $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{x}}} \, dx$

22.8

a. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \, dx$

b. $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

c. $\int_0^{1} \frac{x}{1 + \sqrt{x}} \, dx$

d. $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

e. $\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

f. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$

Voorbeelden van het gebruik van de substitutieregel

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,d(x^2) = \frac{1}{2}\Big[-\cos(x^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$

2. $\displaystyle\int_0^{3} \sqrt{x+1}\,dx = \int_0^{3} \sqrt{x+1}\,d(x+1) = \left[\frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{14}{3}.$

3. $\displaystyle\int_2^{5} (2x-5)^5 dx = \frac{1}{2}\int_2^{5} (2x-5)^5 d(2x-5) = \frac{1}{12}\Big[(2x-5)^6\Big]_2^5$
$$= \frac{1}{12}(5^6-1).$$

4. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^{3} \frac{1}{\ln x}\,d(\ln x) = [\ln(\ln x)]_2^3 = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2).$

5. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \tan x\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x)$
$$= -\big[\ln(\cos x)\big]_{-\pi/4}^{\pi/3} = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

In het volgende voorbeeld maken we gebruik van de expliciete substitutie $y = \mathrm{e}^{x}$. Dan is dus $x = \ln y$ en $dx = \frac{1}{y}\,dy$. Let erop dat we ook de grenzen meetransformeren.

6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int_{y=1/\mathrm{e}}^{y=\mathrm{e}} \frac{1}{y+\frac{1}{y}}\,\frac{1}{y}\,dy = \int_{y=1/\mathrm{e}}^{y=\mathrm{e}} \frac{1}{y^2+1}\,dy$
$$= \big[\arctan y\big]_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} = \arctan \mathrm{e} - \arctan\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Nog een voorbeeld van een expliciete substitutie: $y = \sqrt{x+1}$, dus $x = y^2 - 1$ en $dx = 2y\,dy$.

7. $\displaystyle\int_0^{3} x\sqrt{x+1}\,dx = \int_{y=1}^{y=2} (y^2-1)y\cdot 2y\,dy = \int_{y=1}^{y=2} (2y^4-2y^2)\,dy$
$$= \left[\frac{2}{5}y^5 - \frac{2}{3}y^3\right]_1^2 = \frac{116}{15}.$$

Bereken de volgende integralen via partieel integreren. Raadpleeg zo nodig ook de voorbeelden op bladzijde 205.

22.9

a. $\int_{-\pi}^{0} x\cos x\,dx$

b. $\int_{1}^{e} x\ln x\,dx$

c. $\int_{1}^{e} \ln x\,dx$

d. $\int_{0}^{1} x\arctan x\,dx$

e. $\int_{0}^{\pi} x^2\sin x\,dx$

f. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$

22.10

a. $\int_{0}^{1} x\,\mathrm{e}^{3x}dx$

b. $\int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$

c. $\int_{-2}^{0} (2x+1)\mathrm{e}^{x}\,dx$

d. $\int_{0}^{1} x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$

e. $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,dx$

f. $\int_{1}^{e} \sqrt{x}\ln x\,dx$

Gemengde opgaven

Bereken de volgende integralen.

22.11

a. $\int_{0}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$

b. $\int_{1}^{4} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx$

c. $\int_{1}^{e} x^{\frac{2}{3}}\ln x\,dx$

d. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx$

e. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx$

f. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \arctan 2x\,dx$

22.12

a. $\int_{-2}^{1} |x|\,dx$

b. $\int_{0}^{1} (1-x+x^3)\,dx$

c. $\int_{0}^{1} x\sqrt{4-x^2}\,dx$

d. $\int_{1}^{e} \ln 2x\,dx$

e. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$

f. $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Partieel integreren

De productregel voor differentialen (zie bladzijde 181) kunnen we schrijven als $f(x)\,d(g(x)) = d(f(x)\,g(x)) - g(x)\,d(f(x))$ en dus geldt ook

$$\int_a^b f(x)\,d(g(x)) = \int_a^b d(f(x)\,g(x)) - \int_a^b g(x)\,d(f(x))$$

dat wil zeggen dat

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,d(g(x)) &= \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b g(x)\,d(f(x))\\ &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g(x)\,d(f(x)).\end{aligned}$$

Dit staat bekend als *partieel integreren*. In combinatie met de substitutieregel stelt deze regel ons soms in staat integralen te berekenen die anders onhanteerbaar zouden zijn. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^3 \ln x\,dx &= \int_1^2 \ln x\,d\left(\frac{1}{4}x^4\right)\\ &= \left[(\ln x)\left(\frac{1}{4}x^4\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4}x^4\,d(\ln x)\\ &= 4\ln 2 - \int_1^2 \frac{1}{4}x^3\,dx = 4\ln 2 - \left[\frac{1}{16}x^4\right]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

Je ziet dat we eerst de factor x^3 'achter de d hebben gebracht'. Na toepassen van partieel integreren konden we $\ln x$ 'achter de d vandaan halen' via de regel $d(\ln x) = \frac{1}{x}\,dx$, waarna een integraal ontstond die gemakkelijk uit te rekenen was.

De vraag welke factor je in een concrete opgave achter de d moet brengen, is in zijn algemeenheid niet te beantwoorden. Soms brengt een onhandige keuze je juist verder van huis. Voorbeeld:

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x dx = \int_0^1 x d(\mathrm{e}^x) = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$$

maar

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x dx = \int_0^1 \mathrm{e}^x d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \left[\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x dx = ??$$

Gemengde opgaven (vervolg)

Bereken de volgende integralen.

22.13

a. $\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx$

b. $\int_0^2 x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$

c. $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$

d. $\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,\mathrm{e}^{\cos x}\,dx$

f. $\int_0^1 x \arctan 2x\,dx$

22.14

a. $\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$

b. $\int_0^1 x(1-x)^{20}\,dx$

c. $\int_{-1}^1 \sin^3(\pi x)\,dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\,dx$

e. $\int_0^{\mathrm{e}} \ln(1+3x)\,dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,\mathrm{e}^{-\sin 2x}\,dx$

Voorbeelden van partieel integreren

1. $$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -\int_0^{\pi} x \, d(\cos x) = -\big[x \cos x\big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$
$$= \pi + \big[\sin x\big]_0^{\pi} = \pi.$$

2. $$\int_0^1 \arctan x \, dx = \big[x \arctan x\big]_0^1 - \int_0^1 x \, d(\arctan x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, d(1+x^2) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

In het volgende voorbeeld integreren we twee maal partieel, telkens door e^{x} achter de d te brengen.

3. $$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, d(\mathrm{e}^{x}) = [\mathrm{e}^{x} \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} d(\sin x)$$
$$= -\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \cos x \, dx = -\int_0^{\pi} \cos x \, d(\mathrm{e}^{x})$$
$$= -[\mathrm{e}^{x} \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} d(\cos x)$$
$$= \mathrm{e}^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \sin x \, dx.$$

Het lijkt nu net alsof we niets zijn opgeschoten, want we hebben de oorspronkelijke integraal weer teruggekregen. Maar bij nader inzien is er toch winst geboekt, want als we de oorspronkelijke integraal even I noemen, hebben we afgeleid dat $I = \mathrm{e}^{\pi} + 1 - I$, en dat is een vergelijking waaruit we I kunnen oplossen! Het resultaat is

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \sin x \, dx = \frac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2}.$$

Bereken de volgende integralen indien ze bestaan.

22.15

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

b. $\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$

c. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{10}}\,dx$

d. $\int_2^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \quad (p > 1)$

e. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$

22.16

a. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

b. $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

c. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+x^2}\,dx$

d. $\int_4^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

e. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+|x|}\,dx$

22.17

a. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx$

b. $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{3x}\,dx$

c. $\int_1^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$

d. $\int_{-\infty}^0 x^2\,\mathrm{e}^{x}\,dx$

e. $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|x|}\,dx$

22.18

a. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

b. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

c. $\int_{-\infty}^0 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

d. $\int_{-\infty}^\infty \sin x\,dx$

e. $\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$

Oneigenlijke integralen van type 1

Sommige bepaalde integralen kunnen niet direct, maar wel via een limietovergang gedefinieerd worden. Zulke integralen heten *oneigenlijke integralen*. We onderscheiden daarbij twee typen: bij het eerste type heeft het integratie-interval lengte oneindig, en bij het tweede type is de integrand niet continu in een randpunt van het integratie-interval, bijvoorbeeld omdat er daar een verticale asymptoot optreedt. Bij beide types gaan we ervan uit dat de integrand $f(x)$ continu is behalve eventueel in de randpunten van het integratie-interval. Er bestaan dus primitieve functies van de integrand $f(x)$; één ervan noemen we $F(x)$.

TYPE 1:

Als $f(x)$ continu is op het interval $[a, \infty\rangle$ en als $\lim_{M\to\infty} F(M)$ bestaat, dan is

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} F(M) - F(a).$$

Als $f(x)$ continu is op het interval $\langle -\infty, b]$ en als $\lim_{N\to-\infty} F(N)$ bestaat, dan is

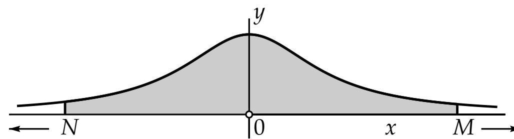
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_N^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{N\to-\infty} F(N).$$

Als $f(x)$ continu is op $\langle -\infty, \infty\rangle$, als de limieten $\lim_{M\to\infty} F(M)$ en $\lim_{N\to-\infty} F(N)$ bestaan en als minstens één van beide eindig is, dan is

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to-\infty} \int_N^M f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} F(M) - \lim_{N\to-\infty} F(N).$$

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to-\infty} \int_N^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to-\infty} \big[\arctan x\big]_N^M \\ &= \lim_{M\to\infty} \arctan M - \lim_{N\to-\infty} \arctan N = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi\end{aligned}$$



Bereken de volgende oneigenlijke integralen indien ze bestaan.

22.19

a. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

b. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

c. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[10]{x}}\,dx$

d. $\int_0^2 \frac{1}{x^p}\,dx \quad (0 < p < 1)$

e. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

22.20

a. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

b. $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

c. $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

d. $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

e. $\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$

22.21

a. $\int_0^1 \ln x\,dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$

c. $\int_{-1}^1 \ln(1-x)\,dx$

d. $\int_0^1 \ln 3x\,dx$

e. $\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

22.22

a. $\int_0^1 \frac{x}{1-x}\,dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

c. $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

d. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

e. $\int_0^1 x \ln x\,dx$

Oneigenlijke integralen van type 2

TYPE 2:

Als $f(x)$ continu is op het interval $[a, b\rangle$ en als $\lim_{t\uparrow b} F(t)$ bestaat, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\uparrow b} \int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\uparrow b} F(t) - F(a).$$

Als $f(x)$ continu is op het interval $\langle a, b]$ en als $\lim_{u\downarrow a} F(u)$ bestaat, dan is

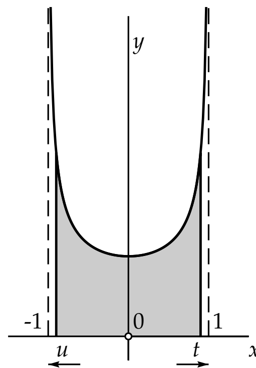
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\downarrow a} \int_u^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{u\downarrow a} F(u).$$

Als $f(x)$ continu is op het interval $\langle a, b\rangle$ en als de twee limieten $\lim_{t\uparrow b} F(t)$ en $\lim_{u\downarrow a} F(u)$ bestaan en als minstens één van beide eindig is, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\downarrow a} \lim_{t\uparrow b} \int_u^t f(x)\,dx = \lim_{t\uparrow b} F(t) - \lim_{u\downarrow a} F(u).$$

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \lim_{u\downarrow -1} \lim_{t\uparrow 1} \int_u^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{u\downarrow -1} \lim_{t\uparrow 1} \big[\arcsin x\big]_u^t \\ &= \lim_{t\uparrow 1} \arcsin t - \lim_{u\downarrow -1} \arcsin u = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.\end{aligned}$$



22.23 Bij de uitwerking van deze opgave is het gebruik van een programmeerbare rekenmachine of een computeralgebrapakket nodig.

Bereken voor $N = 10$, $N = 100$ en $N = 1000$ de uitkomst van de benaderende som $\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)dx$ van de gegeven integraal. Verdeel daarbij het integratie-interval in N deelintervallen van gelijke lengte. Zet de uitkomsten in een tabel en vergelijk ze met de exacte uitkomst.

a. $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx$

b. $\int_{0}^{1} 2^x\, dx$

c. $\int_{1}^{10} \log x\, dx$

22.24 Geef bij elk van de bovenstaande integralen een bovengrens M voor $|f'(x)|$ op het integratie-interval en controleer hiermee de op de volgende bladzijde gegeven afschatting $\frac{1}{2}M(b-a)dx$ voor de fout die je maakt als je de integraal benadert door elk van de sommen die je in de vorige opgave berekend hebt.

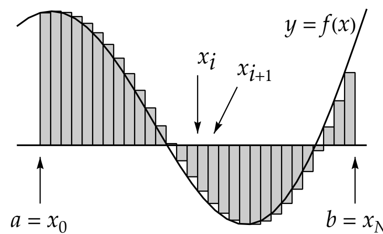
Sommen en integralen

Stel dat $F(x)$ een primitieve functie is van $f(x)$ op het interval $[a,b]$. Verdeel $[a,b]$ in N deelintervallen door middel van deelpunten $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$ met $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Dan is

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} F(x_{i+1}) - F(x_i).\end{aligned}$$

Noem $dx_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta F_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ en $dF_i = F'(x_i)dx_i = f(x_i)dx_i$. Dan is $\Delta F_i \approx dF_i$ mits dx_i klein is, zodat

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)dx_i.$$



We zien dus dat zo'n integraal benaderd kan worden door een *som* (vandaar het integraalteken $\int$ als langgerekte hoofdletter S) van differentialen, voor elk deelinterval één.

Merk op dat $f(x_i)\,dx_i$ de oppervlakte is van de rechthoek met basis dx_i en hoogte $f(x_i)$, voorzien van een minteken als $f(x_i) < 0$ is. Als het aantal deelintervallen toeneemt en de lengtes ervan tot nul naderen, zal de som de integraal steeds beter benaderen.

We kunnen de laatste uitspraak, die door de figuur al wordt geïllustreerd, ook op de volgende manier plausibel maken. Neem aan dat $f(x)$ op $[a,b]$ een continue afgeleide heeft en dat er een getal M bestaat waarvoor geldt dat $|f'(x)| < M$ is voor alle x in $[a,b]$. De meeste 'nette' functies voldoen aan deze voorwaarden. We zullen verder voor de eenvoud aannemen dat alle deelintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ even lang zijn. Voor hun lengte $dx = x_{i+1} - x_i$ geldt dan dat $dx = (b-a)/N$. Omdat $F'(x) = f(x)$ is $F''(x) = f'(x)$ en volgens de afschatting op bladzijde 185 geldt dus $|\Delta F_i - dF_i| \leq \frac{1}{2}M(dx)^2$ zodat

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)dx\right| &= \left|F(b) - F(a) - \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{N-1} \Delta F_i - \sum_{i=0}^{N-1} dF_i\right| \\ &= \left|\sum_{i=0}^{N-1} (\Delta F_i - dF_i)\right| \leq N \times \frac{1}{2}M(dx)^2 = \frac{1}{2}M(b-a)dx\end{aligned}$$

want $Ndx = (b-a)$. Hieruit volgt dat het verschil tussen de integraal en de som inderdaad naar nul gaat als dx naar nul gaat.

22.25 Bij de uitwerking van deze opgave is het gebruik van een programmeerbare rekenmachine of een computeralgebrapakket nodig. Wanneer je een programmeerbare rekenmachine gebruikt moet je met de maximale precisie werken; werk je met een computeralgebrapakket, stel de precisie dan in op minstens 15 decimalen.

We zullen het integratie-interval steeds in *n gelijke* deelintervallen verdelen. Onder $M(n)$ verstaan we de uitkomst van de middelpuntregel en onder $T(n)$ de uitkomst van de trapeziumregel (zie de definities op de volgende bladzijde). Verder definiëren we

$$S(n) = \frac{2M(n) + T(n)}{3}.$$

Deze regel staat bekend als de *regel van Simpson*. Men kan bewijzen dat $S(n)$ een nog veel betere benadering van de integraal is dan $M(n)$ en $T(n)$.

Voorbeeld: omdat $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} = \left[4 \arctan x\right]_0^1 = \pi$ kunnen we numerieke methoden voor het berekenen van deze integraal gebruiken om benaderingen van π te vinden. Ter vergelijking: in 15 decimalen nauwkeurig is

$$\pi = 3.141592653589793\ldots$$

Hieronder zie je in een tabel de waarden van $M(n)$, $T(n)$ en $S(n)$ voor $n = 8$, $n = 16$, $n = 32$ en $n = 64$.

n	$M(n)$	$T(n)$	$S(n)$
8	3.142894729591688	3.138988494491089	3.141592651224821
16	3.141918174308560	3.140941612041388	3.141592653552836
32	3.141674033796337	3.141429893174975	3.141592653589217
64	3.141612998641850	3.141551963485654	3.141592653589784

Maak nu zelf een soortgelijke tabel voor het numeriek berekenen van de hieronder gegeven integralen. Bij elke opgave geven we ter vergelijking ook de op 15 decimalen afgeronde 'exacte' waarde.

a. $\int_0^4 e^{-x^2} dx \approx 0.886226911789569$

b. $\int_0^1 \sin\left(e^x\right) dx \approx 0.874957198780384$

c. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin\left(x^2\right) dx \approx 0.894831469484145$

Numerieke integratiemethoden

Stel dat $f(x)$ continu is op het interval $[a,b]$. Als $F(x)$ een primitieve functie van $f(x)$ is, dan is $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. We zullen echter op de volgende bladzijden zien dat het niet altijd mogelijk is zo'n primitieve functie in formulevorm te geven, zelfs niet als $f(x)$ wel in formulevorm gegeven is. In zulke gevallen geeft een verdeling van het interval $[a,b]$ in kleine deelintervallen via de formule van bladzijde 211 een numerieke benaderingswaarde van de integraal:

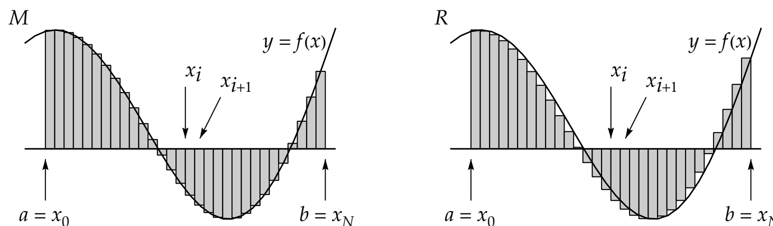
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)dx_i.$$

Die benadering noemen we L. Bij de berekening van L vermenigvuldigen we de lengte $dx_i = x_{i+1} - x_i$ van elk deelinterval telkens met de functiewaarde $f(x_i)$ in het *linker* eindpunt x_i ervan.

In plaats van het linker eindpunt x_i kunnen we ook een ander punt uit het interval $[x_i, x_{i+1}]$ nemen, zoals bijvoorbeeld het middelpunt $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ of het rechter eindpunt x_{i+1}. Zo ontstaan de *middelpuntregel* M en de *rechterpuntregel* R met als formules

$$M = \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) dx_i \quad \text{en} \quad R = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1})\,dx_i$$

die ook allebei numerieke benaderingen geven voor de integraal. Hieronder worden ze geïllustreerd in het geval dat alle deelintervallen even lang zijn gekozen.



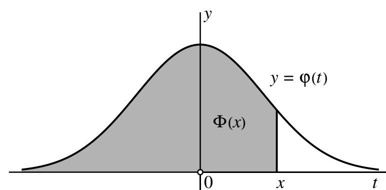
Een beter resultaat dan L of R geeft het *gemiddelde* $\frac{1}{2}(L+R)$ van L en R. De bijbehorende regel heet de *trapeziumregel*, die in het geval dat alle deelintervallen dezelfde lengte dx hebben, geschreven kan worden als

$$T = \left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{N-2}) + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2}f(x_N)\right) dx.$$

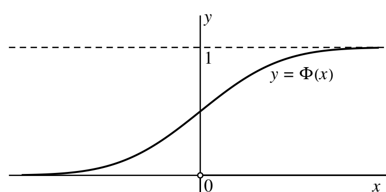
Nog betere resultaten levert een combinatie van M en T, de zogenaamde *regel van Simpson*, die hiernaast wordt beschreven.

22.26 Hiernaast zie je de grafiek van $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$, de *kansdichtheidsfunctie* van de standaardnormale verdeling uit de statistiek, en daaronder de bijbehorende *verdelingsfunctie*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$



Men kan bewijzen (maar dat is niet eenvoudig!) dat $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$.



a. Druk $\int_x^\infty \varphi(t)\, dt$ uit in $\Phi(x)$.
b. Toon aan dat $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
c. Bereken $\Phi(0)$.
d. Bereken $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

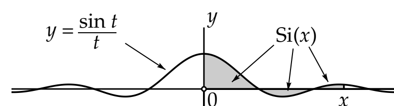
22.27 De *error function* $\text{Erf}(x)$ wordt gedefinieerd door de integraal

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

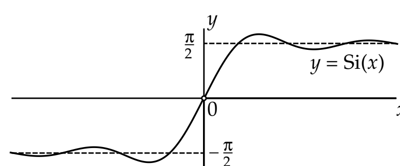
a. Bereken $\text{Erf}(0)$, $\lim_{x\to\infty} \text{Erf}(x)$ en $\lim_{x\to-\infty} \text{Erf}(x)$.
b. Schets de grafiek van $\text{Erf}(x)$.
c. Druk $\text{Erf}(x)$ uit in $\Phi(x)$.

22.28 De *sinusintegraalfunctie* $\text{Si}(x)$ wordt gedefinieerd door de integraal

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$



Hiernaast zijn de grafieken van de functies $\frac{\sin t}{t}$ en $\text{Si}(x)$ getekend. Men kan bewijzen (maar dat is niet eenvoudig!) dat $\lim_{x\to\infty} \text{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$.



a. Toon aan dat $\text{Si}(-x) = -\text{Si}(x)$.
b. Bereken de x-waarden van de lokale maxima en minima van $\text{Si}(x)$.
c. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dx$.
d. Druk $\displaystyle\int_a^b \frac{\sin mt}{t}\, dt$ (met m een constante) uit in termen van $\text{Si}(x)$.

Is primitiveren in formulevorm altijd mogelijk?

Stel dat we de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ willen berekenen. Vaak wordt de integrand $f(x)$ in zo'n geval gegeven door een formule in termen van standaardfuncties (machten, sinussen, cosinussen, exponentiële functies, logaritmen, etc.). We zouden dan graag voor een primitieve functie $F(x)$ ook zo'n uitdrukking in standaardfuncties willen hebben, want dan kunnen we de gevraagde integraal via $F(b) - F(a)$ berekenen.

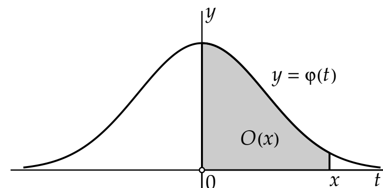
Maar terwijl het omgekeerde proces, het *differentiëren* van functies in formulevorm nooit problemen geeft (dankzij alle differentiatieregels die we kennen), stuit het *primitiveren* vaak op onoverkomelijke moeilijkheden, zelfs als $f(x)$ continu is en door een eenvoudige formule wordt gegeven.

Neem bijvoorbeeld $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Die functie komt in de kansrekening voor als de kansdichtheidsfunctie van de standaardnormale verdeling. De grafiek ervan is de bekende klokkromme van Gauss. De kans dat een kansvariabele die standaardnormaal verdeeld is, een waarde aanneemt in het interval $[a, b]$ is dan gelijk aan de integraal $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ en het zou dus prettig zijn als we formule hadden voor een primitieve functie. Het lukt echter niemand (en dat kan ook *bewezen* worden!) om zo'n formule te geven in termen van bekende standaardfuncties. Zo'n formule bestaat eenvoudig niet.

Toch bestaat er wel een primitieve functie, namelijk de oppervlaktefunctie

$$O(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

want de integrand is continu (zie ook bladzijde 189).



Overigens, in plaats van 0 kun je natuurlijk ook elk ander getal als ondergrens nemen; dat scheelt alleen maar een constante. In de kansrekening werkt men vaak met $-\infty$ als ondergrens. De bijbehorende primitieve functie wordt $\Phi(x)$ genoemd.

Wat je in dit soort gevallen kunt doen, is het numeriek berekenen van waarden van $O(x)$ (of $\Phi(x)$) door middel van geschikt gekozen benaderingsmethoden. Op zo'n manier zijn bijvoorbeeld de tabellen gemaakt voor de verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling die je in veel statistiekboeken aantreft.

23. Toepassingen

23.1 Bereken de raakvector aan de volgende geparametriseerde krommen. Raadpleeg voor illustraties van die krommen zo nodig de opgaven van Hoofdstuk 19 op bladzijde 156. Onderzoek ook of er punten op de kromme zijn waar de raakvector de nulvector is.

a. $(\cos 3t, \sin 2t)$
b. $(\cos 2t, \sin 3t)$
c. $(\cos^3 t, \sin^3 t)$
d. $(\cos^3 t, \sin t)$
e. $(\cos^3 t, \sin 2t)$
f. $(\cos \frac{1}{2}t, \sin^3 t)$
g. $(\sqrt[3]{\cos t}, \sqrt[3]{\sin t})$
h. $(\sqrt[3]{\cos t}, \sin^3 t)$

23.2 Bereken de raakvector aan de volgende in poolcoördinaten gegeven krommen. Neem φ als parameter; de parametrisatie is dan $(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$. Raadpleeg voor illustraties van die krommen zo nodig de opgaven op bladzijde 158.

a. $r = \cos\varphi$
b. $r = \cos 2\varphi$
c. $r = \cos 3\varphi$
d. $r = \sin \frac{1}{2}\varphi$
e. $r = \cos \frac{3}{2}\varphi$
f. $r^2 = \cos 2\varphi$
g. $r = 1 + \cos\varphi$
h. $r = 1 + 3\cos 7\varphi$

23.3 De vergelijking $r = \mathrm{e}^{c\varphi}$ in poolcoördinaten is de vergelijking van een logaritmische spiraal (zie bladzijde 159). Laat zien dat de radiusvector en de raakvector een constante hoek met elkaar maken (dat wil zeggen een hoek die alleen van c afhangt). Bereken die hoek voor $c = 1$.

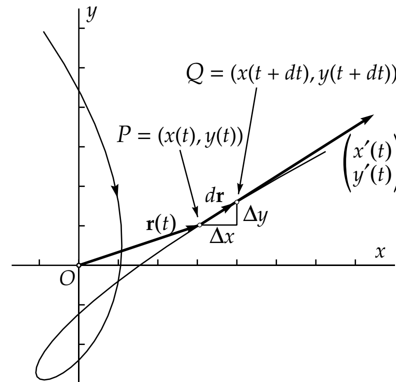
23.4 Bereken de raakvector aan de volgende geparametriseerde ruimtekrommen. Raadpleeg voor illustraties van die krommen zo nodig de opgaven van bladzijde 160.

a. $(t, 2t^2 - 1, t^3)$
b. $(\sin t, \sin 2t, \cos t)$
c. $(\sin t, \sin 2t, \cos 3t)$
d. $(\sin 2\pi t, t, \cos 2\pi t)$
e. $(\sin 2\pi t, t^2 - 1, t^3)$
f. $(\cos t, \sin t, \cos 12t)$

De raakvector aan een geparametriseerde kromme

De hiernaast getekende kromme heeft de parametrisatie

$$(x(t), y(t)) = (t^3 - 2t, 2t^2 - 2t - 2.4).$$



Het getekende deel correspondeert met $-1.6 \leq t \leq 2.2$. De punten $P = (x(t), y(t))$ en $Q = (x(t+dt), y(t+dt))$ liggen dicht bij elkaar op de kromme: hier is $t = 1.9$ en $dt = 0.1$ gekozen. Omdat dt klein is, is het stuk van de kromme tussen P en Q vrijwel recht; het valt ook vrijwel samen met een deel van de raaklijn aan de kromme in het punt P.

Het is gebruikelijk om de vector die van de oorsprong O naar P loopt, de *radiusvector* te noemen, en die aan te geven met $\mathbf{r}(t)$. De verschilvector $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)$ is de vector die van P naar Q loopt. De componenten ervan zijn $\Delta x = x(t+dt) - x(t)$ en $\Delta y = y(t+dt) - y(t)$. Omdat dt klein is, geldt $\Delta x \approx dx = x'(t)\,dt$ en $\Delta y \approx dy = y'(t)\,dt$ en dus is

$$\Delta\mathbf{r} = \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \approx d\mathbf{r} = \begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'(t)\,dt\\ y'(t)\,dt\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix} dt.$$

De vector $\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$ heet de *raakvector* in P aan de kromme. Het is gebruikelijk om die vector ook in P te laten aangrijpen. In dat geval valt de raakvector samen met een deel van de raaklijn aan de kromme in P.

De vector $d\mathbf{r}$, met als componenten de differentialen dx en dy, is gelijk aan de raakvector vermenigvuldigd met de factor dt. Wanneer dt klein is, valt $d\mathbf{r}$ vrijwel samen met $\Delta\mathbf{r}$. In de tekening hierboven geldt dat $t = 1.9$, $dt = 0.1$, $P = (3.059, 1.02)$ en $\Delta\mathbf{r} = \begin{pmatrix}0.941\\ 0.58\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix}8.83\\ 5.6\end{pmatrix}$ en $d\mathbf{r} = \begin{pmatrix}0.883\\ 0.56\end{pmatrix} = \mathbf{v}(t)\,dt$.
Overigens, de raakvector $\mathbf{v}(t)$ is hier slechts op halve grootte getekend om de tekening binnen proporties te houden.

In veel toepassingen is de parameter t de tijd. Dan geeft de radiusvector $\mathbf{r}(t)$ de plaats aan van P op tijdstip t. De raakvector $\mathbf{v}(t)$ is dan de *snelheidsvector*, de vector die de snelheid aangeeft van P op tijdstip t.

Voor ruimtekrommen gaat de behandeling net zo, alleen hebben alle vectoren dan drie, in plaats van twee componenten.

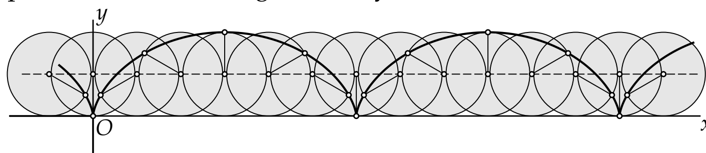
23.5 Bereken de lengte van de volgende krommen.

a. De cirkel $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
b. De cirkel $(R \sin t, R \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
c. De schroeflijn $(R \cos 2\pi t, R \sin 2\pi t, at)$, $0 \leq t \leq 1$.
d. De logaritmische spiraal $(\mathrm{e}^{c\varphi} \cos \varphi, \mathrm{e}^{c\varphi} \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

23.6 De parametervoorstelling

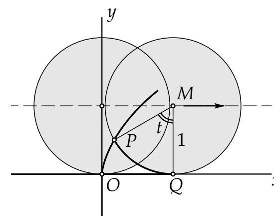
$$(x, y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

stelt de kromme voor die beschreven wordt door een punt P op de rand van een cirkel die over de x-as rolt. Zo'n kromme heet een *cycloïde*. De straal van de cirkel is 1 en het middelpunt M beweegt zich volgens de parametervoorstelling $(t, 1)$ langs de lijn $y = 1$. De beweging van P ten opzichte van M is de cirkelbeweging $(-\sin t, -\cos t)$, en de superpositie van beide bewegingen geeft de parametervoorstelling van de cycloïde.

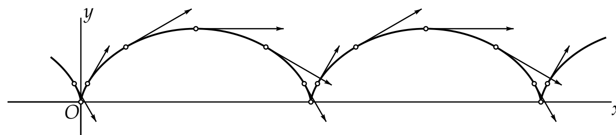


a. Bereken de coördinaten van P voor $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ en $t = 2\pi$.

b. Stel dat Q het contactpunt van de cirkel met de x-as is op tijdstip t. Laat zien dat het lijnstuk OQ en de cirkelboog PQ even lang zijn. (Dit betekent dat de cirkel inderdaad zonder te slippen over de x-as rolt.)



c. Bereken de snelheidsvector (raakvector) en de scalaire snelheid. Vereenvoudig de uitdrukking voor de snelheid met behulp van een geschikte gonioformule. Onderzoek of er punten op de cycloïde zijn waar de snelheid nul is. Voor welke punten is de snelheid maximaal?



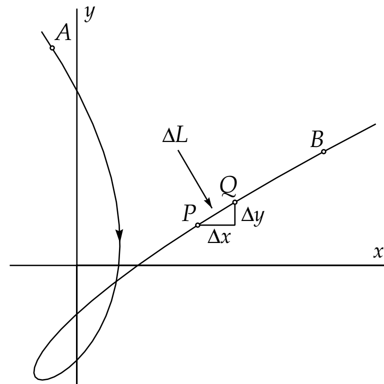
d. Bereken de lengte van één boog van de cycloïde.

De lengte van een kromme

Stel dat een kromme in het vlak gegeven is in de parametervorm $(x(t), y(t))$, waarbij $x(t)$ en $y(t)$ allebei differentieerbare functies zijn van een variabele t. Stel verder dat het interval $[a, b]$ deel uitmaakt van het domein van die twee functies en dat $x'(t)$ en $y'(t)$ beide continu zijn op $[a, b]$. Voor elke t met $a \leq t \leq b$, stelt $(x(t), y(t))$ dan een punt in het vlak voor, en als t van a naar b loopt, loopt het punt $(x(t), y(t))$ over de kromme van $A = (x(a), y(a))$ naar $B = (x(b), y(b))$. We zullen laten zien dat de lengte L van de kromme tussen A en B dan gegeven wordt door de integraal

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

De lengte van het deel van de kromme dat zich tussen de punten $A = (x(a), y(a))$ en $P = (x(t), y(t))$ bevindt, noemen we $L(t)$. Voor positieve dt is de toename $\Delta L = L(t + dt) - L(t)$ dan gelijk aan de lengte van het deel van de kromme tussen de punten $P = (x(t), y(t))$ en $Q = (x(t + dt), y(t + dt))$.
Voor kleine dt is de lengte ΔL vrijwel gelijk aan de afstand $d(P, Q)$. Die is volgens de stelling van Pythagoras gelijk aan $d(P, Q) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.



Aangezien $\Delta x \approx x'(t)dt$ en $\Delta y \approx y'(t)dt$, is $d(P, Q) \approx \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$. De laatste uitdrukking is weer een differentiaal, en wel de differentiaal dL van de functie $L(t)$. De lengte van de kromme tussen A en B wordt dus inderdaad gegeven door de bovenstaande integraal.

Wanneer t de tijd voorstelt, geeft de raakvector $\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ de snelheid aan van P op het tijdstip t. De lengte $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ wordt dan de *scalaire snelheid* van P genoemd en aangegeven met $v(t)$. We zien dat de afstand die door P wordt afgelegd tussen $t = a$ en $t = b$, gegeven wordt door de integraal $\int_a^b v(t)dt$.

Ook hier geldt weer dat de behandeling van ruimtekrommen geheel analoog is. In dat geval is $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ en

$$L = \int_a^b v(t)\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

23.7 De inhoud van een rechte cirkelkegel met hoogte h en straal r van de grondcirkel is gelijk aan $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ($\frac{1}{3}$ maal grondvlak maal hoogte). Verifieer deze formule door de inhoud te berekenen van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de functie $z = \frac{r}{h}y$, $(0 \leq y \leq h)$ rond de y-as te wentelen.

23.8 Men wentelt de grafiek van de functie $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ rond de x-as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

23.9 Men wentelt de grafiek van de functie $f(x) = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$ rond de y-as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

23.10 Men wentelt de grafiek van de functie $f(x) = x^4$, $-1 \leq x \leq 1$ rond de y-as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

23.11 Men wentelt de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $1 \leq x \leq \infty$ rond de x-as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

23.12 Men wentelt de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $1 \leq x \leq \infty$ rond de x-as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

23.13 Men wentelt de grafiek van de functie $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $0 \leq x \leq \infty$ rond de x-as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

23.14 Men wentelt de grafiek van de functie $f(x) = \ln 2x$, $0 < x \leq 1$ rond de y-as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

23.15 Het gebied G dat begrensd wordt door de parabolen $y = x^2$ en $x = y^2$ wordt rond de x-as gewenteld. Bereken de inhoud van het aldus ontstane omwentelingslichaam.

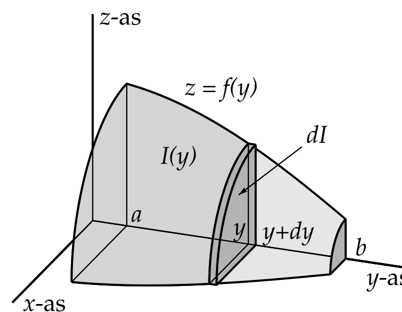
23.16 Bereken de inhoud van het deel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ dat zich tussen de vlakken $z = h$ en $z = R$ bevindt $(-R \leq h \leq R)$.

De inhoud van een omwentelingslichaam

Stel dat de functie $z = f(y)$ continu en niet-negatief is op het interval $[a, b]$. Het lichaam dat wordt begrensd door de vlakken $y = a$, $y = b$ en het oppervlak dat ontstaat door de grafiek van deze functie rond de y-as te wentelen, noemen we K. In de figuur hieronder is slechts het kwart gedeelte van K geschetst dat in het eerste octant ligt. (Het eerste octant is het deel van de ruimte waarvoor $x \geq 0, y \geq 0$ en $z \geq 0$.) Wat is de inhoud van K?

Kies een getal y tussen a en b. De inhoud van het deel van K dat zich links van het verticale vlak door $(0, y, 0)$ bevindt, noemen we $I(y)$. De gevraagde inhoud van K is dan gelijk aan $I(b)$.

Voor kleine positieve dy is de toename $\Delta I = I(y + dy) - I(y)$ gelijk aan de inhoud van het dunne plakje van K dat tussen de verticale vlakken door de punten $(0, y, 0)$ en $(0, y + dy, 0)$ ligt. Dat plakje valt voor kleine positieve dy vrijwel samen met het in de figuur aangegeven dunne cilinderschijfje met dikte dy en cirkels met straal $f(y)$ als linker- en rechterbegrenzing.



Die cirkels hebben als oppervlakte $\pi \times f(y)^2$ en dus is de inhoud van het cilinderschijfje gelijk aan $\pi f(y)^2 dy$. De uitdrukking $\pi f(y)^2\, dy$ is een differentiaal, en wel de differentiaal dI van de inhoudsfunctie $I(y)$, dus $dI = \pi f(y)^2\, dy$. De inhoud van K wordt daarom gegeven door de integraal

$$\text{Inhoud}(K) = I(b) = \int_a^b \pi f(y)^2\, dy.$$

Wanneer $G(y)$ een willekeurige primitieve functie van $\pi f(y)^2$ is, is deze integraal gelijk aan $G(b) - G(a)$.

Neem als voorbeeld de functie $z = \sqrt{R^2 - y^2}$ op het interval $[-R, R]$. De grafiek ervan is een halve cirkel met staal R, en het bijbehorende omwentelingsoppervlak is de bol met straal R en de oorsprong als middelpunt. De inhoud ervan is dus

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - y^2)\, dy.$$

Een primitieve functie van $\pi(R^2 - y^2)$ is $G(y) = \pi(R^2 y - \frac{1}{3}y^3)$, en de inhoud van de bol is dus $G(R) - G(-R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

23.17 Toon aan dat de oppervlakte van het gebogen deel van een rechte cirkelkegel met hoogte h en straal r van de grondcirkel gelijk is aan $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

23.18 Toon aan dat de oppervlakte van een bol met straal R gelijk is aan $4\pi R^2$.

23.19 Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ dat zich tussen de vlakken $z = h$ en $z = R$ bevindt ($-R \leq h \leq R$).

23.20 Men wentelt het paraboolstuk $y = x^2$ met $-1 \leq x \leq 1$ rond de y-as. Bereken de oppervlakte van het zo ontstane omwentelingsoppervlak.

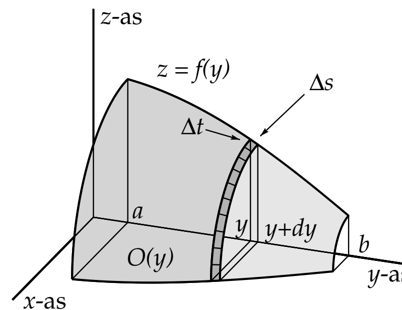
23.21 Men wentelt de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$ met $1 \leq x < \infty$ rond de x-as. Laat zien dat de oppervlakte van het zo ontstane omwentelingsoppervlak oneindig is.

De oppervlakte van een omwentelingsoppervlak

Stel dat de functie $z = f(y)$ niet-negatief en differentieerbaar is op het interval $[a, b]$. We richten ons nu op de *oppervlakte* van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door de grafiek van deze functie rond de y-as te wentelen. We zullen laten zien dat die oppervlakte gelijk is aan de integraal

$$\int_a^b 2\pi f(y)\sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy.$$

Kies een y tussen a en b. De oppervlakte van het deel dat zich links van het verticale vlak door $(0, y, 0)$ bevindt, noemen we $O(y)$. De gevraagde oppervlakte is dan gelijk aan $O(b)$.
Voor kleine positieve dy is de toename $\Delta O = O(y + dy) - O(y)$ gelijk aan de oppervlakte van de smalle, donkergrijs gekleurde band tussen de verticale vlakken door de punten $(0, y, 0)$ en $(0, y + dy, 0)$.



Verdeel die band in N even grote hokjes. In de figuur is $N = 40$ genomen, dus met tien hokjes in het eerste octant. Elk hokje is vrijwel een rechthoek. De zijden ervan noemen we Δs en Δt. Omdat de linkerrand van de donkergrijze band een cirkel is met straal $f(y)$, is de omtrek ervan gelijk aan $2\pi f(y)$, en dus geldt dat $\Delta t = \frac{2\pi}{N} f(y)$. Voor kleine dy is Δs een vrijwel recht lijnstukje met lengte

$$\sqrt{dy^2 + (f(y + dy) - f(y))^2} \approx \sqrt{dy^2 + (f'(y)dy)^2} = \sqrt{1 + f'(y)^2}\,dy.$$

Elk hokje heeft een oppervlakte die vrijwel gelijk is aan $\Delta t \times \Delta s$. In totaal zijn er N hokjes, dus de donkergrijze band heeft een oppervlakte die vrijwel gelijk is aan $2\pi f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}dy$, en men kan bewijzen dat dit inderdaad de differentiaal dO van $O(y)$ is. De oppervlakte zelf wordt dus, zoals we wilden aantonen, gegeven door de bovenstaande integraal.

Wanneer de kromme die rond de y-as gewenteld wordt, gegeven wordt door de parametervorm $(y(t), z(t))$, waarbij de parameter t een interval $[c, d]$ doorloopt, dan is de oppervlakte van het omwentelingsoppervlak gelijk aan

$$\int_c^d 2\pi z(t)\sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

23.22 In het hiernaast behandelde voorbeeld is $\lambda = 0.3$ en $P_0 = 1300$ genomen. Bereken met behulp van een rekenmachine het tijdstip t waarop $P(t) = 2000$ geldt.

23.23 Laat zien dat er in elk exponentieel groeimodel, dat wil zeggen elk groeimodel waarbij een differentiaalvergelijking $dP = \lambda P\,dt$ de oplossingsfuncties $P = P(t)$ beschrijft, een *verdubbelingstijd* t_d bestaat, dat wil zeggen een getal t_d met de eigenschap dat $P(t + t_d) = 2P(t)$ voor elke t. Druk de verdubbelingstijd t_d uit in λ. (In deze opgave wordt $\lambda > 0$ verondersteld.)

23.24 $P(t)$ is een oplossingsfunctie van een exponentieel groeimodel met verdubbelingstijd $t_d = 5$. Stel dat $P_0 = 100$. Bereken met behulp van een rekenmachine het tijdstip t waarop $P(t) = 1\,000\,000$. Geef eerst een ruwe schatting.

23.25 Voor $\lambda < 0$ beschrijft de differentiaalvergelijking $dP = \lambda P\,dt$ een model voor *exponentiële afname*, een verschijnsel dat zich bijvoorbeeld voordoet bij radioactief verval. Dan werkt men meestal niet met verdubbelingstijd, maar met *halveringstijd*. Leg uit wat hiermee bedoeld wordt en bereken met behulp van een rekenmachine de halveringstijd als $\lambda = -0.2$.

23.26 Bereken met behulp van een rekenmachine hoe lang het duurt bij exponentieel verval met een halveringstijd $t_h = 3$ totdat een hoeveelheid $P_0 = 100$ gereduceerd is tot $P = 0.001$. Geef ook eerst weer een ruwe schatting.

23.27 De differentiaalvergelijking

$$\frac{1}{P^{1+a}}\,dP = \lambda\,dt$$

(met $\lambda > 0$ en $a > 0$) heet een *doomsday vergelijking*. Je zou deze differentiaalvergelijking voor kleine positieve a kunnen zien als een kleine variant op de differentiaalvergelijking voor exponentiële groei. De oplossingskrommen hebben echter een kwalitatief ander verloop, zoals we zullen zien.

a. Laat zien dat je de differentiaalvergelijking kunt schrijven in de vorm $d(P^{-a}) = d(-a\lambda t)$.
b. Laat zien dat alle oplossingen geschreven kunnen worden in de vorm $P(t) = (a\lambda(T - t))^{-1/a}$ voor zekere constante T. In het bijzonder geldt voor $t = 0$ dat $P_0 = P(0) = (a\lambda T)^{-1/a}$.
c. Druk T uit in a, λ en P_0 en laat zien dat $\lim_{t\uparrow T} P(t) = \infty$. Dit is de reden dat men het tijdstip T *doomsday* noemt.
d. Bereken *doomsday* met behulp van je rekenmachine als $a = 0.2$, $\lambda = 0.05$ en $P_0 = 100$ en geef ook een formule voor $P(t)$ in dit geval.

Exponentiële groei

In veel toepassingen zoekt men wiskundige modellen voor groeiprocessen. Het gaat dan bijvoorbeeld om een populatie waarvan de grootte in de tijd varieert. Als model kiest men vaak een differentieerbare functie $P(t)$ van de variabele t die de tijd voorstelt. $P(t)$ stelt dan de grootte van de populatie voor op het tijdstip t. In een van de eenvoudigste groeimodellen neemt men aan dat voor een kleine tijdstoename dt de *relatieve* populatietoename $\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{P(t+dt) - P(t)}{P(t)}$ bij benadering evenredig is met dt. Dat wil zeggen dat er een constante λ is zo, dat $\dfrac{\Delta P}{P} \approx \lambda\, dt$. Dit leidt tot de *differentiaalvergelijking*

$$\frac{1}{P}\, dP = \lambda\, dt$$

als het wiskundige model waaraan de differentieerbare functie $P = P(t)$ die de populatiegroei beschrijft, zal moeten voldoen.

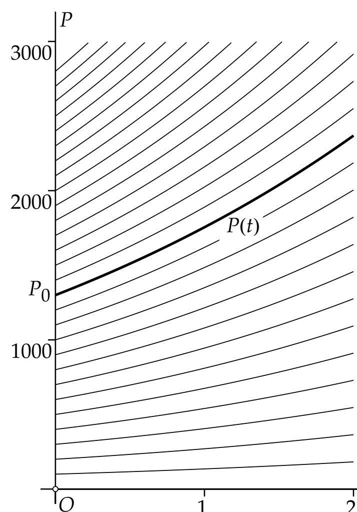
Het linkerlid ervan is gelijk aan de differentiaal $d(\ln P)$ en het rechterlid is gelijk aan de differentiaal $d(\lambda t)$. Die differentialen zijn gelijk, en dus geldt voor zekere constante c dat

$$\ln P(t) = \lambda t + c$$

oftewel, met $P_0 = \mathrm{e}^{c}$,

$$P(t) = \mathrm{e}^{\lambda t + c} = P_0\, \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Dit model heet het *exponentiële groeimodel*. Hierin stelt P_0 blijkbaar de populatiegrootte op het tijdstip $t = 0$ voor (substitueer $t = 0$ in de formule).
In de hiernaast getekende situatie is voor de groeifactor λ de waarde $\lambda = 0.3$ genomen. Dik getekend is de grafiek van de functie $P(t)$ die hoort bij $P_0 = 1300$. Daarnaast is voor een aantal andere waarden van P_0 de grafiek dun getekend.



De waarde van λ wordt door de omstandigheden (vruchtbaarheid, voedselsituatie, etc.) bepaald; de beginwaarde P_0 legt daarna de oplossingsfunctie $P(t)$ volledig vast.

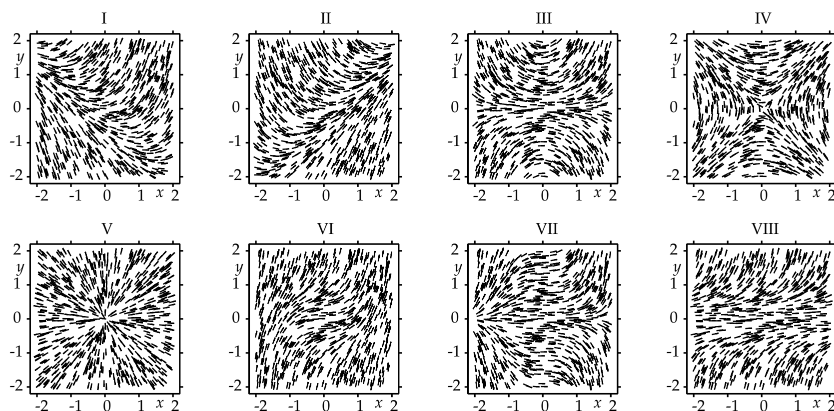
23.28 In het hiernaast behandelde voorbeeld is het lijnelementenveld van de logistische differentiaalvergelijking

$$dP = \mu(M - P)P\,dt$$

getekend voor $M = 4000$ en $\mu = 0.0004$. De schaalverdeling op de assen is niet gelijk: een eenheid op de t-as correspondeert met duizend eenheden op de P-as.

a. Laat zien dat alle lijnelementen op een horizontale lijn $P = c$ dezelfde richting hebben.
b. Bereken de tangens van de hellingshoek van een lijnelement op de lijn $P = 2000$. (Let op: omdat de schaalverdelingen op de assen ongelijk zijn, is die tangens niet gelijk aan de afgeleide $\frac{dP}{dt}$.)
c. Bereken ook de tangens van de hellingshoek van de lijnelementen op de lijnen $P = 1000$ en $P = 3000$. Vergelijk de gevonden waarden met hetgeen je met behulp van een geodriehoek in de tekening kunt aflezen.
d. Maak een ruwe schets van het lijnelementenveld in het gebied van het (t, P)-vlak waarvoor $P > 4000$ is. Kun je wat je vindt, interpreteren in termen van het groeimodel?
e. Maak een ruwe schets van het lijnelementenveld in het gebied van het (t, P)-vlak waarvoor $P < 0$ is.

23.29 Zoek bij elk lijnelementenveld de bijpassende differentiaalvergelijking. Motiveer je antwoorden.



a. $y\,dy = x\,dx$
b. $dy = xy\,dx$
c. $dy = y^2\,dx$
d. $dy = (x^2 + y^2)\,dx$
e. $dy = (x - y)\,dx$
f. $dy = (x + y)\,dx$
g. $dy = x^2y\,dx$
h. $x\,dy = y\,dx$

Logistische groei – het lijnelementenveld

Voor positieve λ beschrijft de differentiaalvergelijking $dP = \lambda P dt$ exponentiële groei. De populatiegrootte $P(t)$ op tijdstip t wordt dan gegeven door de formule $P(t) = P_0 \, \mathrm{e}^{\lambda t}$, waarbij P_0 de populatiegrootte op het tijdstip $t = 0$ voorstelt.

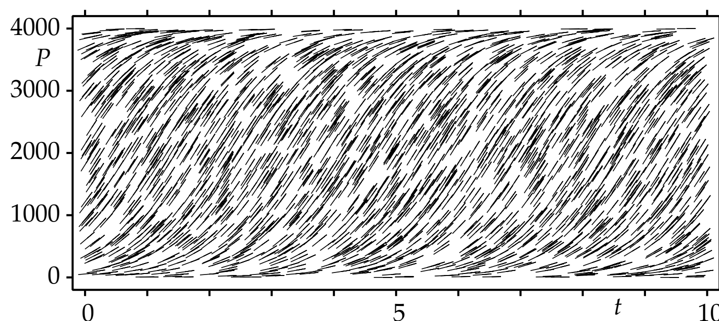
Voor grote waarden van t kan zo'n groeimodel echter niet realistisch zijn, want de e-macht groeit steeds sneller. Voedseltekort en andere beperkingen zullen de groei op den duur echter afremmen, en we zoeken nu een wiskundig model waarin dat ook tot uitdrukking komt. De eenvoudigste oplossing krijg je door λ (de 'groeifactor') niet meer constant te houden, maar te laten afhangen van de populatiegrootte P. Naarmate P een 'verzadigingswaarde' M benadert, zal de groei moeten afnemen.

De functie $\lambda(P) = \mu(M - P)$ heeft deze eigenschap als de constante μ positief is. Het aldus aangepaste model krijgt dan als differentiaalvergelijking

$$dP = \mu(M - P)P \, dt$$

waarin $P = P(t)$ een (nog onbekende) functie van t is en μ en M positieve constanten zijn die van de specifieke omstandigheden afhangen. Dit groeimodel staat bekend als *logistische groei*.

We kiezen als voorbeeld $M = 4000$ en $\mu = 0.0004$. Om enig idee te krijgen van de oplossingsfuncties $P(t)$ maken we een schets van het *lijnelementenveld* met in dit geval $0 \leq t \leq 10$ en $0 \leq P \leq 4000$.



In dit gebied zijn 2500 punten (t, P) *at random* gekozen en in elk punt is een lijntje met richtingscoëfficiënt $\frac{dP}{dt} = \mu(M - P)P$ getekend. Net zoals ijzervijlsel de veldlijnen van een magnetisch veld zichtbaar maakt, zo maakt ook het lijnelementenveld de oplossingskrommen, dat wil zeggen de grafieken van de oplossingsfuncties $P = P(t)$ van de differentiaalvergelijking, zichtbaar.

23.30 Stel dat $P(t)$ de oplossingskromme is van de logistische differentiaalvergelijking

$$dP = \mu(M - P)P\ dt$$

met $M = 4000$ en $\mu = 0.0004$ (net als in de figuur hiertegenover) die voldoet aan $P(0) = 2000$.

a. Bereken voor welke t geldt dat $P(t) = 3000$.
b. Bereken voor welke t geldt dat $P(t) = 1000$.
c. Laat zien dat $P(-t) + P(t) = M$. Wat betekent dit meetkundig?

23.31 Laat zien dat voor elke oplossingsfunctie $P(t)$ van de logistische differentiaalvergelijking geldt dat $P(t_0 + t) + P(t_0 - t) = M$. Hierbij is (net als op de bladzijde hiertegenover) t_0 het tijdstip waarop geldt dat $P(t_0) = \frac{1}{2}M$.
Ga na dat dit betekent dat de grafiek van $P(t)$ puntsymmetrisch is in het punt $(t_0, \frac{1}{2}M)$.

23.32 In de afleiding van de formule voor de oplossingsfuncties van de logistische differentiaalvergelijking is gebruik gemaakt van $0 < P < M$, met andere woorden, er is aangenomen dat de populatiegrootte P positief is en kleiner dan de verzadigingswaarde M.

Stel nu dat $P > M$ is. Ga na dat je dan gebruik kunt maken van

$$\frac{d}{dP}\left(\ln \frac{P}{P - M}\right) = \frac{M}{(M - P)P}$$

om een formule voor de oplossingsfuncties te vinden en bepaal zo'n formule. Laat in het bijzonder zien dat de oplossingsfunctie $P(t)$ die voldoet aan de voorwaarde $P(0) = 2M$ gegeven wordt door de formule $P(t) = \dfrac{2M}{2 - \mathrm{e}^{-\mu M t}}$.
Bereken ook $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

23.33 Bepaal vergelijkingen voor alle oplossingskrommen van de volgende differentiaalvergelijkingen. Gebruik daarbij net als hiernaast de methode van het *scheiden van de variabelen*, dat wil zeggen breng alles met x naar de ene kant van het gelijkteken en alles met y naar de andere kant.

a. $y\,dy = x\,dx$
b. $x\,dy = y\,dx$
c. $dy = xy\,dx$
d. $dy = y^2\,dx$
e. $dy = x^2y\,dx$

Logistische groei – de oplossingsfuncties

Het lijnelementenveld van het logistische groeimodel dat beschreven wordt door de differentiaalvergelijking

$$dP = \mu(M - P)P\,dt$$

geeft een goed kwalitatief inzicht in het gedrag van de oplossingskrommen, maar in dit geval is het ook mogelijk om een exacte formule voor de oplossingsfuncties $P = P(t)$ te bepalen.

Als eerste stap schrijven we de differentiaalvergelijking als

$$\frac{M}{(M-P)P}\,dP = \mu M\,dt.$$

Je kunt zelf nagaan dat $\dfrac{d}{dP}\left(\ln\dfrac{P}{M-P}\right) = \dfrac{M}{(M-P)P}$. We kunnen de differentiaalvergelijking dus schrijven als

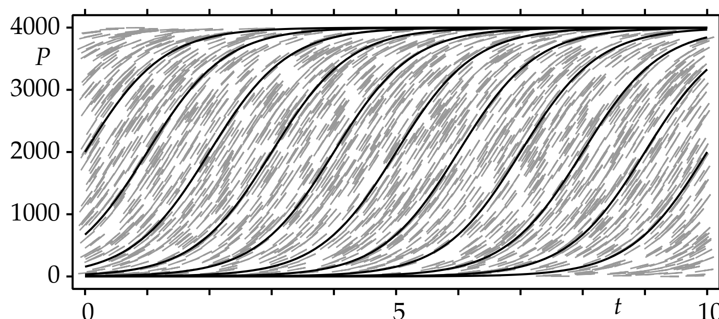
$$d\left(\ln\frac{P}{M-P}\right) = d(\mu M t)$$

waaruit volgt dat $\ln\dfrac{P}{M-P} = \mu M t + c$ voor zekere constante c. Als je nu $c = -\mu M t_0$ noemt en P uit deze vergelijking oplost, krijg je:

$$P = P(t) = \frac{M\mathrm{e}^{\,\mu M(t-t_0)}}{\mathrm{e}^{\,\mu M(t-t_0)} + 1} = \frac{M}{1 + \mathrm{e}^{\,-\mu M(t-t_0)}}.$$

Voor $t = t_0$ is de populatiegrootte $P(t)$ gelijk aan $M/2$, de helft van de verzadigingswaarde M. De grafiek van $P(t)$ heeft een langgerekte S-vorm met $\lim_{t\to-\infty} P(t) = 0$ en $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$.

Hieronder is een aantal oplossingskrommen getekend, weer met $M = 4000$ en $\mu = 0.0004$, met als achtergrond het lijnelementenveld.



VIII Achtergronden

In dit deel geven we – zonder opgaven – aanvullend achtergrondmateriaal bij een aantal onderwerpen die in de voorgaande hoofdstukken al aan de orde zijn geweest. Je kunt het naar behoefte raadplegen. Aan de orde komen onder andere de reële getallenrechte, de verschillende soorten intervallen en de symbolen ∞ en $-\infty$. Verder coördinatenstelsels in het vlak en in de ruimte, het functiebegrip, grafieken, limieten en continuïteit. Tot slot geven we bewijzen van de rekenregels voor differentiëren en de formules voor de afgeleiden van de standaardfuncties.

24. Reële getallen en coördinaten

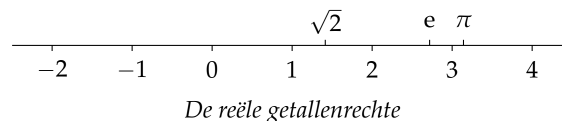
De reële getallenrechte

De verzameling van alle reële getallen wordt aangeduid met $\mathbb{R}$. De positieve reële getalen zijn de getallen die groter dan 0 zijn, de negatieve reële getallen zijn de getallen die kleiner dan 0 zijn. De *absolute waarde* $|r|$ van een reëel getal r is gelijk aan r als $r \geq 0$ is, en aan $-r$ als $r < 0$ is.

Een meetkundig beeld van de verzameling van alle reële getallen krijg je wanneer je op een rechte lijn twee punten kiest, ze 0 en 1 noemt, en daarop vervolgens alle andere getallen op de voor de hand liggende wijze hun plaats geeft (zie hieronder). Daarbij denk je je in dat de lijn naar beide kanten onbegrensd doorloopt. Zo ontstaat de *reële getallenrechte*, een lijn waarvan elk punt met een reëel getal correspondeert. Naast de gehele getallen

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

en de niet-gehele rationale getallen (de getallen die door breuken voorgesteld kunnen worden) bevat de reële getallenrechte ook de irrationale getallen zoals $\sqrt{2}$, e en π.



De reële getallenrechte

Omdat we reële getallen op deze manier kunnen identificeren met punten op de reële getallenrechte, spreken we vaak (enigszins slordig) van 'het punt r' als we eigenlijk 'het reële getal r' bedoelen.

Elk reëel getal kun je schrijven als een eindigende of een oneindig voortlopende decimale ontwikkeling. Zo is

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.4142135623730950488\ldots \\
\frac{3}{16} &= 0.1875 \\
\pi &= 3.1415926535897932385\ldots \\
\frac{22}{7} &= 3.1428571428571428571\ldots \\
\mathrm{e} &= 2.7182818284590452354\ldots \\
\frac{271801}{99990} &= 2.7182818281828182818\ldots
\end{aligned}$$

In dit boek werken we met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.

De accolade-notatie voor verzamelingen

Het is vaak handig om verzamelingen van reële getallen te beschrijven met de *accolade-notatie*. De elementen van zo'n verzameling (dat wil zeggen de getallen die er deel van uitmaken) worden dan binnen een stel accolades opgesomd, of in woorden of in formules beschreven. Zo is

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van een worp met een dobbelsteen, en

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

de verzameling van alle positieve reële getallen. In die laatste notatie betekent het symbool $\in$ 'is element van'. Links van de verticale streep staat dat de verzameling B bestaat uit reële getallen, en rechts van de streep staat aan welke voorwaarde ze moeten voldoen. Je kunt deze notatie dus lezen als: 'B is de verzameling van alle x die element zijn van $\mathbb{R}$ en die voldoen aan $x > 0$'.

Intervallen

Onder een *interval* verstaat men een verzameling van reële getallen die correspondeert met een aaneengesloten stuk van de reële getallenrechte. We onderscheiden de volgende soorten intervallen (waarbij steeds wordt aangenomen dat a en b reële getallen zijn en dat $a < b$ is):

Notatie:	*Accoladevorm:*	*Soortnaam:*
$\langle a, b\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	begrensd open interval
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	begrensd gesloten interval
$\langle a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	begrensd halfopen interval
$[a, b\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	begrensd halfopen interval
$[a, \infty\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	onbegrensd interval
$\langle a, \infty\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	onbegrensd open interval
$\langle -\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	onbegrensd interval
$\langle -\infty, b\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	onbegrensd open interval
$\langle -\infty, \infty\rangle$	{ alle reële getallen }	onbegrensd open interval.

De eerste vier intervallen zijn *begrensde* intervallen. Hun *lengte* is steeds gelijk aan $b - a$. De andere intervallen zijn allemaal onbegrensd; ze hebben 'lengte

oneindig'. De symbolen ∞ en $-\infty$ (die *niet* tot $\mathbb{R}$ behoren!) worden uitgesproken als 'oneindig' en 'min oneindig'. Soms schrijft men $+\infty$ ('plus oneindig') in plaats van ∞.

Onder een *open omgeving* van een punt $r \in \mathbb{R}$ verstaan we een open interval $\langle a, b \rangle$ waar r in ligt, dus waarvoor geldt dat $a < r < b$.

Wiskunde en werkelijkheid

De reële getallenrechte is een goede illustratie van het spanningsveld dat er altijd bestaat tussen de werkelijkheid en de wiskunde die men hanteert om greep op de werkelijkheid te krijgen. Wiskunde is altijd een idealisatie, en met de reële getallenrechte is het niet anders. Ondanks zijn naam (*reële* getallenrechte) is het een wiskundig model, een door mensen bedacht ideaalbeeld.

In werkelijkheid is een rechte lijn nooit volmaakt recht en ook nooit onbegrensd van lengte. In werkelijkheid hebben we te maken met een getrokken streep op een stuk papier, een stoffelijke liniaal of met een meetlint met daarop een verdeling in centimeters, in inches, of welke andere eenheid ook. Op zo'n getrokken streep, zo'n liniaal of zo'n meetlint is er nauwelijks verschil tussen π en $22/7$, laat staan tussen e en $271801/99990$ (zie bladzijde 233).

Toch werken degenen die wiskunde toepassen graag in een geïdealiseerd wiskundig model omdat je daar volledig greep hebt op alle afleidingen, formules en berekeningen: ze zijn 'exact'. Wat je bij het toepassen van wiskunde doet, bestaat meestal uit vier stappen:

1. Kies een wiskundig model.
2. Voer daarin afleidingen en berekeningen uit.
3. Interpreteer de resultaten in termen van de werkelijkheid.
4. Onderzoek of die vertaalde resultaten bij benadering kloppen met wat je in de werkelijkheid waarneemt.

De stappen 1, 3 en 4 behoren tot het domein van degene die de wiskunde toepast. Hij of zij zal daar over de nodige deskundigheid en ervaring moeten beschikken. Dit boek gaat vrijwel uitsluitend over stap 2; het beschrijft de basisgereedschapkist waarover iedereen die op universitair of HBO-niveau wiskunde gebruikt, moet beschikken.

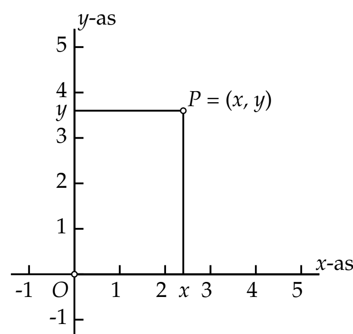
Coördinaten in het vlak

In een plat vlak kan men als volgt een *coördinatenstelsel* aanbrengen. Kies een punt O, de *oorsprong* genaamd, en twee rechte lijnen door O, de *coördinaatassen*.

Breng op die twee assen een schaalverdeling aan zodat het reële getallenrechten worden. Trek vanuit een willekeurig punt P lijnen evenwijdig aan de assen. De coördinaten van P zijn dan de reële getallen die corresponderen met de snijpunten van die lijnen met de coördinaatassen.

Bijna altijd kiest men de twee coördinaatassen loodrecht op elkaar. Men spreekt dan van een *rechthoekig* (of *orthogonaal*) coördinatenstelsel. Meestal tekent men de eerste as horizontaal, en omdat de bijbehorende coördinaat vaak met de letter x wordt aangeduid, wordt die as dan de x-as genoemd. De verticale as heet dan meestal de y-as en het coördinatenstelsel heet een Oxy-stelsel. Het is verder gebruikelijkelijk om de schaalverdeling op de x-as van links naar rechts te laten oplopen, en op de y-as van beneden naar boven. Al deze afspraken zijn echter niet heilig. Soms worden andere letters dan x en y gebruikt, en soms wordt het assenstelsel ook anders gekozen.

Als x en y de twee coördinaten van een punt P zijn, noteert men ze als (x, y). Vaak schrijft men $P = (x, y)$, waarbij dus het punt P met zijn coördinatenpaar geïdentificeerd wordt. Omdat de coördinaten van elk punt uit twee reële getallen bestaat, noemt men het vlak met daarin zo'n coördinatenstelsel $\mathbb{R}^2$ (spreek uit: R-twee). Het gaat hier weer om een wiskundige idealisatie: men denkt zich het vlak onbegrensd naar alle kanten uitgebreid, en denkt zich in dat er bij elk paar (x, y) reële getallen ook precies één punt in dat geïdealiseerde vlak hoort.



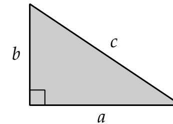
Bij het tekenen van grafieken van functies is het in veel gevallen handig om de schaalverdelingen op de x-as en de y-as niet gelijk te kiezen (zie bijvoorbeeld de grafiek op bladzijde 131). Bij meetkundige toepassingen doet men dat echter meestal wel. Zijn de beide schaalverdelingen gelijk, dan spreekt men van een *orthonormaal* of *cartesisch* coördinatenstelsel, naar René Descartes (1596-1650) die zich ook Cartesius noemde en die een van de pioniers was van het werken met coördinaten in de meetkunde.

Bij een orthonormaal coördinatenstelsel wordt de afstand $d(P_1, P_2)$ van de punten P_1 en P_2 met coördinaten (x_1, y_1) respectievelijk (x_2, y_2) volgens de stelling van Pythagoras gegeven door $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

De stelling van Pythagoras

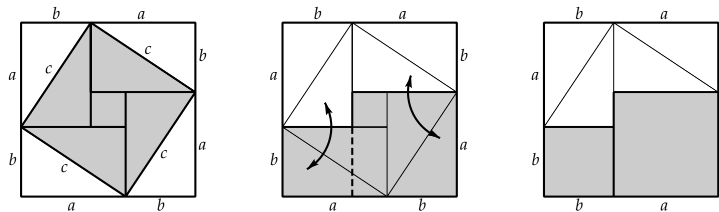
De Griek Pythagoras leefde omstreeks 500 voor Christus, eerst op Samos, en later in Syracuse. De naar hem genoemde stelling is echter al veel eerder ontdekt en bewezen. We vinden de stelling bijvoorbeeld al op kleitabletten uit Mesopotamië (het huidige Irak) van omstreeks 1800 voor Christus.

Stelling van Pythagoras: *In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c geldt* $a^2 + b^2 = c^2$.



Bewijs: Teken acht exemplaren van de gegeven rechthoekige driehoek op de hieronder aangegeven wijze binnen een vierkant met zijden $a + b$, vier witte en vier grijze. Het kleine vierkantje in het midden kleur je ook grijs. Er ontstaat dan een schuin getekend grijs vierkant met zijde c (zie de linkerfiguur), en dus met oppervlakte c^2.

Verwissel (zie de middenfiguur) vervolgens de grijze driehoeken links- en rechtsboven met de witte driehoeken links- en rechtsonder. De resulterende grijze figuur bestaat dan uit twee vierkanten naast elkaar: een vierkant met zijde b en een vierkant met zijde a (zie de rechterfiguur). Hieruit volgt dat c^2, de grijze oppervlakte links, gelijk is aan $a^2 + b^2$, de grijze oppervlakte rechts, waarmee de stelling bewezen is.



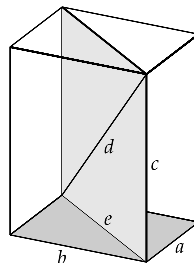
In veel oude teksten wordt de stelling van Pythagoras als volgt geformuleerd:

Stelling van Pythagoras (rechthoeksvariant): *In een rechthoek met zijden a en b en diagonaal c geldt* $a^2 + b^2 = c^2$.

In de ruimte geldt iets soortgelijks:

Stelling van Pythagoras (driedimensionaal): *In een rechthoekig blok met ribben a, b en c en lichaamsdiagonaal d geldt* $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Het bewijs van de driedimensionale vorm is een kwestie van twee maal de tweedimensionale stelling toepassen: eerst op het verticale diagonaalvlak door een opstaande ribbe c en een lichaamsdiagonaal d. Dat is een rechthoek met diagonaal d. Als e de horizontale zijde is van die rechthoek, geldt $d^2 = e^2 + c^2$, terwijl e zelf voldoet aan $e^2 = a^2 + b^2$. Combinatie van de beide resultaten geeft $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, zoals bewezen moest worden.

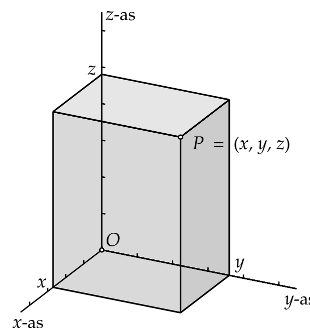


Coördinaten in de ruimte

In de ruimte kan men als volgt een coördinatenstelsel aanbrengen. Kies een punt O, de *oorsprong* genaamd, en drie rechte lijnen door O, niet in één vlak, de *coördinaatassen*. Breng op die drie assen een schaalverdeling aan zodat het reële getallenrechten worden. Elk tweetal assen bepaalt een vlak door O. Er zijn drie van die vlakken, de *coördinaatvlakken*.

Breng door een willekeurig punt P vlakken aan die evenwijdig aan de coördinaatvlakken zijn. De coördinaten van P zijn dan de reële getallen die corresponderen met de snijpunten van die vlakken met de coördinaatassen. De ruimte, voorzien van zo'n coördinatenstelsel, heet $\mathbb{R}^3$ (spreek uit: R-drie).

Bijna altijd kiest men de coördinaatassen loodrecht op elkaar. Men spreekt dan van een *rechthoekig* (of *orthogonaal*) coördinatenstelsel. Meestal tekent men de eerste twee assen horizontaal, en omdat de bijbehorende coördinaten vaak met de letters x en y worden aangeduid, worden die assen dan de x-as en de y-as genoemd. De verticale as noemt men dan meestal de z-as en het coördinatenstelsel een $Oxyz$-stelsel. Zijn de schaalverdelingen op de drie coördinaatassen gelijk, dan spreekt men van een *orthonormaal* of *cartesisch* coördinatenstelsel.



Bij een orthonormaal coördinatenstelsel in de ruimte wordt de afstand $d(P_1, P_2)$ van de punten P_1 en P_2 met coördinaten (x_1, y_1, z_1) respectievelijk (x_2, y_2, z_2) volgens de driedimensionale stelling van Pythagoras gegeven door

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

25. Functies, limieten en continuïteit

Functie, domein en bereik

Onder een *functie van* $\mathbb{R}$ *naar* $\mathbb{R}$ verstaat men een voorschrift dat op een welbepaalde manier reële getallen in reële getallen omzet. Dat kan met behulp van een formule, een omschrijving in woorden of op welke andere wijze dan ook. Een goed beeld van wat een functie is, geeft het onderstaande *input-outputmodel*. Het is een soort *black box* die als input reële getallen accepteert, en bij elke geaccepteerde input een reëel getal als output geeft.



De input wordt vaak met een letter aangeduid, bijvoorbeeld x, en de bijbehorende output door een andere letter, bijvoorbeeld y. Om aan te geven dat y de output is die bij x hoort, schrijft men $y = f(x)$, waarbij f, het *functiesymbool*, staat voor wat er in de *black box* gebeurt.

In plaats van de letter f kan natuurlijk ook iedere andere letter of symbool gebruikt worden. Denk bijvoorbeeld aan de wortelfunctie, die gegeven wordt door $y = \sqrt{x}$. Als input x kan elk reëel getal $x \geq 0$ genomen worden; de bijbehorende output y is dan de wortel van x. En natuurlijk kun je voor de letters x en y ook andere letters nemen, als ze maar niet ook in een andere betekenis worden gebruikt.

In veel gevallen kun je bij een functie niet alle reële getallen als input gebruiken: bij de wortelfunctie moet je je beperken tot getallen die groter dan of gelijk aan nul zijn. In het algemeen noemt men de verzameling van alle reële getallen die als input acceptabel zijn, het *domein* van de functie. De verzameling van alle reële getallen die als output kunnen optreden, heet het *bereik* of de *waardenverzameling* van de functie. Voorbeelden:

Functie:	*Domein:*	*Bereik:*
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty\rangle$	$[0, \infty\rangle$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty\rangle$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$f(x) = \ln x$	$\langle 0, \infty\rangle$	$\mathbb{R}$.

Er zijn verschillende manieren om functies te noteren. De duidelijkste is de *pijltjesnotatie* die er voor de wortelfunctie als volgt uitziet:

$$f:\ x \longrightarrow y = \sqrt{x}.$$

Hierin vind je links van de dubbele punt het functiesymbool f, links van de pijl de inputvariabele x en rechts van de pijl de formule die aangeeft hoe uit de inputvariabele de outputvariabele y gemaakt wordt. In de hogere wiskunde is deze notatie algemeen gebruikelijk, maar in de toepassingen gebruikt men meestal de kortere vorm $y = \sqrt{x}$ of $f(x) = \sqrt{x}$. In dit boek hanteren we ook meestal deze laatste vorm, dus $f(x) = \sqrt{x}$. Het nadeel is wel dat dit er als een vergelijking uitziet, terwijl het in werkelijkheid om een functievoorschrift gaat. Bij de pijltjesnotatie is dat laatste direct duidelijk. In computeralgebrapakketten mag die verwarring niet optreden, vandaar dat men daar dan altijd voor functies zoiets als de pijltjesnotatie moet gebruiken.

Let erop dat er verschil is tussen een functievoorschrift, zoals bijvoorbeeld $f(x) = x^3$, en de grafiek van de functie die erdoor gedefinieerd wordt. De grafiek is een kromme in $\mathbb{R}^2$, namelijk de kromme die in accolade-vorm geschreven kan worden als

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}.$$

Dit wordt echter vaak ingekort tot: de kromme $y = x^3$. (Ook in dit boek doen we dat.) In de praktijk zal meestal uit de context wel duidelijk zijn wat bedoeld wordt: een functievoorschrift of een grafiek.

Inverteerbare functies

Als f een functie met domein D_f en bereik B_f is, hoort bij elke $x \in D_f$ precies één waarde $y = f(x) \in B_f$. Dezelfde waarde y kan echter voor meer dan een x optreden, denk bijvoorbeeld aan de functie $f(x) = x^2$ die zowel voor $x = 2$ als voor $x = -2$ de waarde $y = 4$ geeft.

Als de situatie zo is dat er bij elke $y \in B_f$ ook maar één $x \in D_f$ hoort, noemt men de functie f *inverteerbaar*. Naast f is dan ook de *inverse functie* f^{-1} met domein B_f en bereik D_f gedefinieerd die als het ware de input- en outvariabelen verwisselt, dus

$$y = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y).$$

Uiteraard geldt $f^{-1}(f(x)) = x$ voor alle $x \in D_f$ en $f(f^{-1}(y)) = y$ voor alle $y \in B_f$.

Als we bij de inverse functie f^{-1} de inpuntvariabele weer x en de outputvariabele weer y noemen, krijgen we de functie $y = f^{-1}(x)$ met een grafiek die uit die van $y = f(x)$ ontstaat door spiegelen in de lijn $y = x$. Voorbeelden van inverteerbare functies zijn te vinden in de hoofdstukken 17 en 18.

Limieten

Op bladzijde 63 hebben we precies aangegeven wat we onder de limiet van een rij reële getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ verstaan. We hebben daarbij onderscheid gemaakt tussen de gevallen $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ met $L \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. We herhalen hier dat overzicht:

'lim'-notatie:	pijlennotatie:	omschrijving:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$	$a_n \to L$ als $n \to \infty$	Bij ieder positief getal p (hoe klein ook) is er een term a_N in de rij waarvoor geldt dat alle termen a_n met $n > N$ voldoen aan $\lvert a_n - L \rvert < p$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$a_n \to \infty$ als $n \to \infty$	Bij ieder positief getal P (hoe groot ook) is er een term a_N in de rij waarvoor geldt dat alle termen a_n met $n > N$ voldoen aan $a_n > P$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$a_n \to -\infty$ als $n \to \infty$	Dit betekent eenvoudig dat $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = \infty$.

Limieten van functies hebben we wat intuïtiever behandeld, bijvoorbeeld op bladzijde 145, waar we hebben laten zien dat $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ of op bladzijde 153, waar we in samenhang met de definitie van het getal e hebben laten zien dat $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1$. Ook bij de definitie van de afgeleide van een functie in een punt a moeten we met limieten van functies werken.

De vage, intuïtieve betekenis van $\lim_{x\to a} f(x) = L$ is: 'als x steeds dichter tot a nadert, nadert $f(x)$ steeds dichter tot L'. Met behulp van limieten van rijen kunnen we dit nader preciseren. Het idee is als volgt. Als zo'n limiet bestaat en $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is een rij punten uit het domein van f met $a_n \neq a$ voor alle n en $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan geldt ook dat $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

Voor een precieze definitie van het limietbegrip bij functies keren we de zaak als het ware om. We zeggen dat $\lim_{x\to a} f(x) = L$ is als voor *elke* rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in het domein van f met $a_n \neq a$ voor alle n en $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, geldt dat $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$. We voeren de definitie dus terug op het limietbegrip voor rijen, dat we al behandeld hebben. Let op het gecursiveerde woordje *elke*. De limiet $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ moet geldig zijn voor *elke* rij met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $a_n \neq a$ voor alle n.

Overigens, de eis dat alle a_n ongelijk aan a moeten zijn, ook als a in het domein van f ligt, komt omdat $f(a)$ in dat geval best ongelijk aan die limietwaarde L kan zijn. De waarde van f in a heeft geen enkele invloed op de limietwaarde van $f(x)$ voor $x \to a$, zo die bestaat. Verderop zullen we *continuïteit* in a definiëren via de eis dat $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

We geven nu echter eerst de formele definities voor allerlei soorten limieten van functies. Stel dus dat f een functie is die gedefinieerd is op een open omgeving van een punt a, behalve misschien in a zelf (denk bijvoorbeeld aan de functie $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ die niet gedefinieerd is in $x = 0$) en stel dat L een reëel getal is.

Definitie: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ betekent: voor elke rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in het domein van f met $a_n \neq a$ voor alle n en $a_n \to a$, geldt dat $f(a_n) \to L$.

Op een soortgelijke wijze:

Definitie: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ betekent: voor elke rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in het domein van f met $a_n \neq a$ voor alle n en $a_n \to a$, geldt dat $f(a_n) \to \infty$.

Definitie: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ betekent: voor elke rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in het domein van f met $a_n \neq a$ voor alle n en $a_n \to a$, geldt dat $f(a_n) \to -\infty$.

In de laatste twee gevallen heeft de grafiek van f voor $x = a$ een verticale asymptoot. Eenzijdige limieten worden op net zo'n manier gedefinieerd:

Definitie: $\lim_{x\uparrow a} f(x) = L$ betekent: voor elke rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in het domein van f met $a_n < a$ voor alle n en $a_n \to a$, geldt dat $f(a_n) \to L$.

Definitie: $\lim_{x\downarrow a} f(x) = L$ betekent: voor elke rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in het domein van f met $a_n > a$ voor alle n en $a_n \to a$, geldt dat $f(a_n) \to L$.

Op een soortgelijke wijze wordt de betekenis van de limieten $\lim_{x\uparrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\uparrow a} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x\downarrow a} f(x) = -\infty$ gedefinieerd. Ook dan is er weer een verticale asymptoot bij $x = a$.

Nog zijn hiermee de mogelijkheden niet uitgeput. Ook het punt a kan namelijk 'in oneindig komen'. We geven slechts één voorbeeld, de andere mogelijkheden laten we aan de lezer over.

Definitie: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ betekent: voor elke rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in het domein van f met $a_n \to \infty$, geldt dat $f(a_n) \to L$.

De grafiek van f heeft in dit geval een horizontale asymptoot met als vergelijking $y = L$. Allerlei voorbeelden van limieten en opgaven over limieten zijn te vinden in de hoofdstukken 17 en 18.

Continuïteit

Wat wil het zeggen dat een functie $f(x)$ continu is in een punt a uit zijn domein? Dat de functiewaarden $f(x)$ voor x vlak bij a nauwelijks afwijken van $f(a)$, en des te minder naarmate x dichter bij a ligt. Dit kunnen we precies maken met behulp van een limiet:

Definitie: De functie $f(x)$ heet *continu in* a als a in het domein van f ligt en $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definitie: De functie $f(x)$ heet *continu van links in* a als a in het domein van f ligt en $\lim_{x\uparrow a} f(x) = f(a)$.

Definitie: De functie $f(x)$ heet *continu van rechts in* a als a in het domein van f ligt en $\lim_{x\downarrow a} f(x) = f(a)$.

Definitie: Een functie f heet *continu op een interval* I als I deel uitmaakt van het domein van f en als f continu is in elk punt van I. Is zo'n punt een eindpunt van I (bijvoorbeeld het punt a als $I = [a, b]$), dan eisen we slechts dat f in dat punt continu van links of continu van rechts is, al naar gelang het een rechter- of linkereindpunt is.

Vrijwel alle door 'gewone' formules en symbolen gedefinieerde functies zijn continu op alle intervallen in hun domein. Het zou te ver voeren dit hier nader te preciseren of te bewijzen. Als vuistregel kun je hanteren: een functie is continu op een interval als je de grafiek ervan op dat interval kunt tekenen zonder de pen van het papier te halen. Soms moet je daarbij toch oppassen; zie de functies die in de opgaven 20.43 en 20.46 (bladzijden 176 en 178) aan de orde komen.

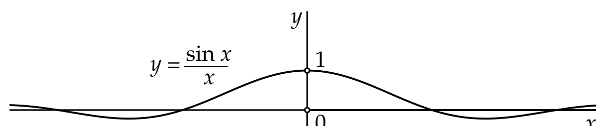
Voorbeelden:

- ☐ De functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$ is continu op de twee intervallen $\langle -\infty, 0\rangle$ en $\langle 0, \infty\rangle$ die samen het domein van f vormen.
- ☐ De functie $f(x) = \tan x$ is continu op elk interval $\langle \frac{k-1}{2}\pi, \frac{k+1}{2}\pi\rangle$ met k geheel.
- ☐ De functie $f(x) = \sqrt{x}$ is continu op $[0, \infty\rangle$.
- ☐ De functie $f(x)$ die gedefinieerd wordt door $f(x) = 0$ als x rationaal is en $f(x) = 1$ als x irrationaal is, is in geen enkel punt continu want elk interval bevat zowel rationale als irrationale punten.

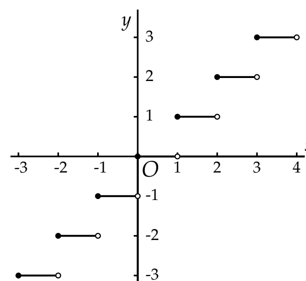
□ De functie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

is continu in het punt 0 want $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. In alle andere punten is f ook continu, dus f is continu op de gehele $\mathbb{R}$.



□ De *vloerfunctie* $f(x) = \lfloor x \rfloor$ is gedefinieerd door: $\lfloor x \rfloor$ is het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x. Zo is bijvoorbeeld $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$. Deze functie is discontinu in elk geheel punt maar continu in alle andere punten. In de gehele punten is de functie wel continu van rechts maar niet van links. Zo is bijvoorbeeld $\lim_{x \downarrow 3} \lfloor x \rfloor = 3 = \lfloor 3 \rfloor$ maar $\lim_{x \uparrow 3} \lfloor x \rfloor = 2 \neq \lfloor 3 \rfloor$.



Opmerking 1: de vloerfunctie wordt ook wel *entierfunctie* genoemd, naar het Franse woord *entier*, dat *geheel* betekent.

Opmerking 2: het afronden van een reëel getal op een gegeven aantal decimalen kan met behulp van de vloerfunctie precies gedefinieerd worden. Zo is het getal $\pi = 3.1415926\ldots$, op 3 decimalen nauwkeurig afgerond, gelijk aan

$$\frac{\lfloor 1000\pi + 0.5 \rfloor}{1000} = \frac{\lfloor 3141.5926\ldots + 0.5 \rfloor}{1000} = \frac{3142}{1000} = 3.142.$$

De algemene formule voor het afronden van het getal r op n decimalen luidt $\dfrac{\lfloor 10^n r + 0.5 \rfloor}{10^n}$.

26. Afgeleide functies

Rekenregels

De afgeleide $f'(x)$ van een functie $y = f(x)$ in een punt x is gedefinieerd als

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

mits deze limiet bestaat en eindig is. Op bladzijde 169 zijn enige rekenregels en standaardafgeleiden gegeven. Hier volgen nogmaals die rekenregels:

$$\begin{aligned}
(c\,f(x))' &= c\,f'(x) \quad \text{voor elke constante } c \\
(f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x) \quad \text{(kettingregel)} \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \text{(productregel)} \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(quotiëntregel).}
\end{aligned}$$

De eerste twee regels volgen direct uit de limietdefinitie. In deze sectie lichten we de geldigheid van de kettingregel, de productregel en de quotiëntregel nader toe.

De geldigheid van de *kettingregel* tonen we aan met behulp van differentialen (zie bladzijde 181). Ter herinnering: als $y = f(x)$ dan is de differentiaal df van f in x gelijk aan $df = f'(x)\,dx$. Stel nu dat f en g differentieerbare functies zijn en dat $h(x) = f(g(x))$. Dan is enerzijds $dh = h'(x)\,dx$ en anderzijds $dh = f'(g(x))\,d(g(x))$. Maar $d(g(x)) = g'(x)\,dx$ dus $dh = f'(g(x))\,d(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)\,dx$. Combinatie van de beide uitdrukkingen voor dh levert $h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$. Hiermee is de kettingregel aangetoond.

Een bewijs van de *productregel* geven we met behulp van de limietdefinitie van de afgeleide:

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)g(x+dx)-f(x)g(x)}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)g(x+dx)-f(x+dx)g(x)+f(x+dx)g(x)-f(x)g(x)}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0}\left(f(x+dx)\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}+g(x)\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right) \\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x).
\end{aligned}$$

Voor een bewijs van de *quotiëntregel* bepalen we eerst de afgeleide van $\frac{1}{g(x)}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{dx\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+dx)}-\dfrac{1}{g(x)}}{dx}\\ &= \lim_{dx\to 0}\frac{g(x)-g(x+dx)}{g(x+dx)g(x)dx}\\ &= \lim_{dx\to 0}\left(\frac{1}{g(x+dx)g(x)}\,\frac{g(x)-g(x+dx)}{dx}\right)\\ &= \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

Het bewijs van de quotiëntregel wordt voltooid door $\frac{f(x)}{g(x)}$ te schrijven als $f(x)\frac{1}{g(x)}$ en het bovenstaande te combineren met de productregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\,\frac{1}{g(x)} + f(x)\,\frac{-g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Standaardafgeleiden

We geven nu bewijzen van de formules van de afgeleiden van de standaardfuncties op bladzijde 169. Daarbij maken we gebruik van de limietdefinitie van de afgeleide, het werken met differentialen, de hierboven afgeleide rekenregels en van de volgende twee standaardlimieten (zie de bladzijden 145 en 153):

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\mathrm{e}^{dx}-1}{dx} = 1 \qquad \text{en} \qquad \lim_{dx\to 0}\frac{\sin dx}{dx} = 1.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x.}$ Het bewijs gebruikt de limietdefinitie:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+dx}-\mathrm{e}^x}{dx} = \mathrm{e}^x\lim_{dx\to 0}\frac{\mathrm{e}^{dx}-1}{dx} = \mathrm{e}^x.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}a^x = a^x\ \ln a.}$ Het bewijs gebruikt de kettingregel:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{\ln a^x} = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a}\ \ln a = a^x\ \ln a.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}.}$ Het bewijs gebruikt differentialen en de relatie

$$y = \ln x \iff x = e^{y}.$$

Uit $dx = e^{y}\,dy$ volgt $d(\ln x) = dy = \dfrac{1}{e^{y}}dx = \dfrac{1}{x}dx.$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\,({}^{a}\log x) = \dfrac{1}{x\ln a}.}$ Het bewijs gebruikt de relatie ${}^{a}\log x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

$$\frac{d}{dx}\,({}^{a}\log x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{x\ln a}.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}x^{p} = p\,x^{p-1}.}$ Het bewijs gebruikt de kettingregel:

$$\frac{d}{dx}x^{p} = \frac{d}{dx}e^{\ln x^{p}} = \frac{d}{dx}e^{p\ln x} = e^{p\ln x}\,\frac{p}{x} = x^{p}\,\frac{p}{x} = p\,x^{p-1}.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x.}$ Het bewijs gebruikt de limietdefinitie en de volgende hulplimiet, die we eerst zullen bewijzen:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{1-\cos dx}{dx} = 0.$$

Bewijs van de hulplimiet:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{1-\cos dx}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{2\sin^{2}(\frac{1}{2}dx)}{dx} = \lim_{dx\to 0}\sin(\tfrac{1}{2}dx)\frac{\sin(\frac{1}{2}dx)}{\frac{1}{2}dx} = 0.$$

Nu het eigenlijke bewijs:

$$\begin{aligned}\lim_{dx\to 0}\frac{\sin(x+dx)-\sin x}{dx} &= \lim_{dx\to 0}\frac{\sin x\cos dx + \cos x\sin dx - \sin x}{dx}\\ &= \lim_{dx\to 0}\left(\sin x\frac{\cos dx - 1}{dx} + \cos x\frac{\sin dx}{dx}\right)\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x.}$ Bewijs:

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin(\frac{\pi}{2}-x) = -\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin x.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}.}$ Bewijs met behulp van de quotiëntregel:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$ Het bewijs gebruikt de relatie

$$y = \arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sin y.$$

Uit $dx = \cos y\,dy$ volgt $dy = \dfrac{1}{\cos y}dx$ dus

$$d(\arcsin x) = dy = \frac{1}{\cos y}dx = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.}$ Op dezelfde wijze, nu met de relatie

$$y = \arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cos y.$$

Uit $dx = -\sin y\,dy$ volgt $dy = \dfrac{-1}{\sin y}dx$ dus

$$d(\arccos x) = dy = \frac{-1}{\sin y}dx = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}dx = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

□ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}.}$ Nu gebruiken we de relaties

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} \quad \text{(zie bladzijde 140, opgave 17.31)}$$

$$\text{en} \quad y = \arctan x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tan y.$$

Uit $dx = \dfrac{1}{\cos^2 y}dy$ volgt $dy = \cos^2 y\,dx$ dus

$$d(\arctan x) = dy = \cos^2 y dx = \frac{1}{1+\tan^2 y}dx = \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Formuleoverzicht

Algebra

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(a \times b)^r = a^r \times b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Getallenrijen en vergelijkingen

Driehoek van Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\leftarrow n=0\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\leftarrow n=1\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\leftarrow n=2\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\leftarrow n=3\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\leftarrow n=4\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\leftarrow n=5\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\leftarrow n=6\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1\ \leftarrow n=7\\
&&&&&&&\dots&&&&&&&\dots
\end{array}$$

Faculteiten:

$$\begin{aligned}
0! &= 1\\
k! &= 1\times\cdots\times k \quad \text{voor elk positief geheel getal } k.
\end{aligned}$$

Binomiaalcoëfficiënten: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Het binomium van Newton:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.
\end{aligned}$$

Somformule rekenkundige rij: $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\,n(a_1+a_n)$.

Somformule eindige meetkundige rij: $\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ mits $r \neq 1$.

Somformule oneindige meetkundige rij: $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$ mits $-1 < r < 1$.

Limieten: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n} = 0$ als $a > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$, $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$.

De *abc*-formule: Als $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ en $b^2-4ac \geq 0$, dan is

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Vlakke meetkunde

Vergelijking van een lijn met normaalvector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $\quad ax + by = c.$

Vergelijking van de lijn door de punten $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$:

$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1).$$

Afstand $d(A, B)$ van de punten $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$:

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Inproduct van $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$: $\quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$

Lengte van $\mathbf{a}$: $\quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$

Als φ de hoek is tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, dan: $\quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi.$

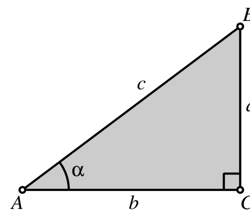
Vergelijking van de cirkel met middelpunt (m, n) en straal r:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Driehoeksmeting:

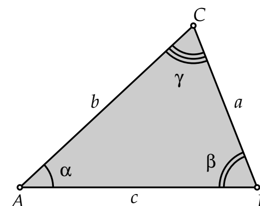
$\sin \alpha = \dfrac{a}{c}, \qquad \cos \alpha = \dfrac{b}{c}, \qquad \tan \alpha = \dfrac{a}{b}.$

$a^2 + b^2 = c^2$ (stelling van Pythagoras).



$\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$ (sinusregel).

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (cosinusregel).



$O = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ (oppervlakteformule).

Ruimtemeetkunde

Vergelijking van een vlak met normaalvector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\quad ax + by + cz = d.$

Afstand $d(A, B)$ van de punten $A = (a_1, a_2, a_3)$ en $B = (b_1, b_2, b_3)$:

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Inproduct van $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$: $\quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$

Lengte van **a**: $\quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$

Als φ de hoek is tussen **a** en **b**, dan: $\quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi.$

Vergelijking van de bol met middelpunt (m_1, m_2, m_3) en straal r:

$$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = r^2.$$

Exponentiële en logaritmische functies

Voor elke $a > 0, a \neq 1$ geldt: $\quad {}^a\log x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x.$

$${}^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y$$

$${}^a\log(x/y) = {}^a\log x - {}^a\log y$$

$${}^a\log\left(x^y\right) = y\ {}^a\log x$$

$${}^a\log x = \frac{{}^g\log x}{{}^g\log a}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad \text{als} \quad a > 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{{}^a\log x}{x^q} = 0 \quad \text{als} \quad q > 0$$

Natuurlijke logaritme (d.w.z. grondtal e): $\quad \ln x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = x.$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Gonioformules

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{array}{lclcl} x = \arcsin y & \Longleftrightarrow & y = \sin x & \text{en} & -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \\ x = \arccos y & \Longleftrightarrow & y = \cos x & \text{en} & 0 \leq x \leq \pi \\ x = \arctan y & \Longleftrightarrow & y = \tan x & \text{en} & -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi \end{array}$$

Differentiëren

Rekenregels voor differentieerbare functies:

$$\begin{aligned} (c\,f(x))' &= c\,f'(x) \quad \text{voor elke constante } c \\ (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x) \quad \text{(kettingregel)} \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{(productregel)} \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(quotiëntregel).} \end{aligned}$$

Standaardfuncties en hun afgeleiden:

$f(x)$	$f'(x)$	
x^p	$p\,x^{p-1}$	voor elke p
a^x	$a^x \ln a$	voor elke $a > 0$
e^x	e^x	
${}^a\log x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	voor elke $a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Differentialen, integralen en toepassingen

Als $y = f(x)$ dan is $dy = d(f(x)) = f'(x)\,dx$.

Substitutieregel: als $y = g(x)$ dan is

$$\int f(y)\,dy = \int f(g(x))\,d(g(x)) = \int f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Partieel integreren: $\displaystyle\int f\,dg = f\,g - \int g\,df.$

Radiusvector van een geparametriseerde vlakke kromme, respectievelijk ruimtekromme:

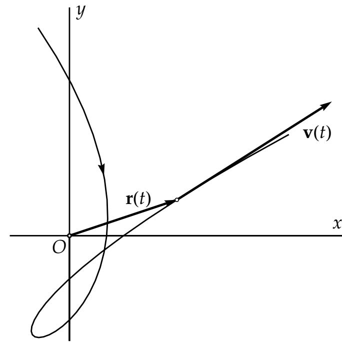
$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Snelheidsvector (raakvector):

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

respectievelijk

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$



Scalaire snelheid:

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Lengte van een geparametriseerde vlakke kromme, respectievelijk ruimtekromme tussen $\mathbf{r}(a)$ en $\mathbf{r}(b)$:

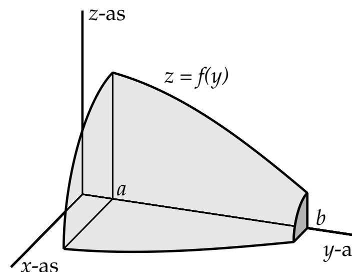
$$L = \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \quad \text{resp.}$$
$$L = \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de functie $z = f(y)$ rond de y-as te wentelen:

$$I = \int_a^b \pi\, f(y)^2\,dy.$$

Oppervlakte van datzelfde omwentelingslichaam:

$$O = \int_a^b 2\pi f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}\,dy.$$



Exponentiële groei, differentiaalvergelijking: $dP = \lambda P\,dt$.
Oplossingsfuncties: $P(t) = P_0 \mathrm{e}^{\lambda t}$.

Logistische groei, differentiaalvergelijking: $dP = \mu(M - P)\,dt$.

Oplossingsfuncties voor $0 < P < M$: $P(t) = \dfrac{M}{1 + \mathrm{e}^{-\mu M(t - t_0)}}$.

Antwoorden

I Getallen

1. Rekenen met gehele getallen

1.1 a. 6321 b. 22700

1.2 a. 4815 b. 1298 c. 5635

1.3 a. 3026 b. 3082 c. 5673 d. 605 e. 2964

1.4 a. 29382 b. 36582 c. 36419 d. 66810 e. 70844

1.5 a. $(q, r) = (11, 11)$ b. $(16, 3)$ c. $(27, 10)$ d. $(27, 8)$ e. $(21, 3)$

1.6 a. $(44, 2)$ b. $(63, 100)$ c. $(130, 12)$ d. $(13, 315)$ e. $(86, 49)$

1.7 a. $(1405, 2)$ b. $(46, 72)$ c. $(2753, 2)$ d. $(315, 82)$ e. $(256, 28)$

1.8 a. $(1032, 22)$ b. $(133, 34)$ c. $(360, 1)$ d. $(75, 30)$ e. $(1110, 53)$

1.9 a. $2 \times 2 \times 2 \times 3$ b. $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ c. $2 \times 5 \times 5 \times 5$ d. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
e. $2 \times 7 \times 7$

1.10 a. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ b. $2 \times 2 \cdots \times 2$ (tien keer) c. $3 \times 3 \times 5 \times 7$
d. $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11$ e. $3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

1.11 a. $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ b. $2 \times 2 \times 13 \times 13$ c. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
d. $2 \times 3 \times 11 \times 17$ e. $2 \times 2 \times 5 \times 43$

1.12 a. $3 \times 5 \times 17$ b. $3 \times 3 \times 7 \times 7$ c. $2 \times 19 \times 19$
d. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ e. 5×197

1.13 a. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ b. $3 \times 23 \times 29$ c. $2 \times 7 \times 11 \times 13$ d. 2003 (priem)
e. $2 \times 2 \times 3 \times 167$

1.15 a. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ b. $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ c. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
d. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}$ e. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 24, 36, 48, 72, 144\}$

1.16 a. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 24, 36, 48, 72\}$ b. $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$
c. $\{1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001\}$ d. $\{1, 3, 11, 17, 33, 51, 187, 561\}$
e. $\{1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196\}$

1.17 a. 6 b. 12 c. 9 d. 8 e. 17

1.18 a. 45 b. 72 c. 2 d. 27 e. 24

1.19 a. 32 b. 33 c. 125 d. 490 e. 128

1.20 a. 1 b. 1 c. 25 d. 1960 e. 8

1.21 a. 60 b. 135 c. 126 d. 80 e. 363

1.22 a. 156 b. 320 c. 720 d. 1690 e. 204

1.23 a. 250 b. 432 c. 1560 d. 4440 e. 1364

1.24 a. 720 b. 828 c. 3528 d. 945 e. 6851

1.25 a. (3,180) b. (6,360) c. (5,210) d. (9,378) e. (3,1512)

1.26 a. (7,980) b. (16,2240) c. (13,780) d. (12,1008) e. (63,3780)

2. Rekenen met breuken

2.1 a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{2}{5}$ c. $\frac{3}{7}$ d. $\frac{1}{3}$ e. $\frac{1}{4}$

2.2 a. $\frac{5}{12}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{5}{9}$ d. $\frac{27}{32}$ e. $\frac{7}{12}$

2.3 a. $(\frac{4}{12}, \frac{3}{12})$ b. $(\frac{14}{35}, \frac{15}{35})$ c. $(\frac{20}{45}, \frac{18}{45})$ d. $(\frac{28}{44}, \frac{33}{44})$ e. $(\frac{24}{156}, \frac{65}{156})$

2.4 a. $(\frac{9}{54}, \frac{6}{54})$ b. $(\frac{9}{30}, \frac{4}{30})$ c. $(\frac{9}{24}, \frac{20}{24})$ d. $(\frac{20}{36}, \frac{21}{36})$ e. $(\frac{18}{120}, \frac{15}{120})$

2.5 a. $(\frac{20}{60}, \frac{15}{60}, \frac{12}{60})$ b. $(\frac{70}{105}, \frac{63}{105}, \frac{30}{105})$ c. $(\frac{9}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36})$ d. $(\frac{6}{30}, \frac{2}{30}, \frac{25}{30})$ e. $(\frac{30}{72}, \frac{28}{72}, \frac{27}{72})$

2.6 a. $(\frac{16}{216}, \frac{30}{216}, \frac{45}{216})$ b. $(\frac{28}{60}, \frac{9}{60}, \frac{50}{60})$ c. $(\frac{40}{210}, \frac{45}{210}, \frac{49}{210})$ d. $(\frac{32}{504}, \frac{60}{504}, \frac{9}{504})$
e. $(\frac{25}{390}, \frac{50}{390}, \frac{18}{390})$

2.7 a. $\frac{6}{19}$ b. $\frac{7}{15}$ c. $\frac{11}{18}$ d. $\frac{11}{36}$ e. $\frac{25}{72}$

2.8 a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{14}{85}$ c. $\frac{39}{84}$ d. $\frac{31}{90}$ e. $\frac{29}{60}$

2.9 a. $\frac{7}{12}$ b. $\frac{1}{30}$ c. $\frac{16}{63}$ d. $\frac{2}{99}$ e. $\frac{17}{30}$

2.10 a. $\frac{17}{12}$ b. $\frac{1}{35}$ c. $\frac{29}{28}$ d. $\frac{5}{72}$ e. $\frac{119}{165}$

2.11 a. $\frac{5}{12}$ b. $-\frac{1}{45}$ c. $\frac{11}{24}$ d. $\frac{7}{6}$ e. $-\frac{1}{30}$

2.12 a. $\frac{29}{315}$ b. $\frac{17}{108}$ c. $\frac{67}{360}$ d. $\frac{1}{10}$ e. $\frac{13}{42}$

2.13 a. $\frac{47}{60}$ b. $\frac{13}{42}$ c. $\frac{29}{180}$ d. $\frac{1}{42}$ e. $\frac{31}{120}$

2.14 a. $\frac{7}{8}$ b. $\frac{3}{4}$ c. $-\frac{7}{24}$ d. $\frac{1}{12}$ e. $\frac{1}{5}$

2.15 a. $\frac{3}{8}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $-\frac{13}{24}$ d. $-\frac{1}{36}$ e. $\frac{1}{3}$

2.16 a. $\frac{7}{27}$ b. $\frac{7}{15}$ c. $-\frac{59}{180}$ d. 1 e. $\frac{11}{30}$

2.17 a. $\frac{11}{70}$ b. $\frac{4}{3}$ c. $\frac{71}{84}$ d. $\frac{85}{286}$ e. $\frac{57}{170}$

2.18 a. $\frac{10}{21}$ b. $\frac{8}{45}$ c. $\frac{10}{91}$ d. $\frac{63}{26}$ e. $\frac{13}{300}$

2.19 a. 3 b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{4}{3}$ d. $\frac{15}{14}$ e. $\frac{16}{9}$

2.20 a. $\frac{14}{15}$ b. $\frac{14}{5}$ c. $\frac{27}{8}$ d. $\frac{15}{8}$ e. $\frac{4}{9}$

2.21 a. 3 b. 1 c. $\frac{20}{27}$ d. $\frac{10}{49}$ e. $\frac{2}{3}$

2.22 a. $\frac{14}{15}$ b. $\frac{2}{3}$ c. 30 d. $\frac{27}{25}$ e. $\frac{28}{25}$

2.23 a. $\frac{3}{2}$ b. $\frac{1}{2}$ c. 6 d. $\frac{14}{15}$ e. $\frac{2}{3}$

2.24 a. $\frac{8}{9}$ b. $\frac{4}{3}$ c. $\frac{8}{3}$

2.25 a. 2 b. $-\frac{154}{25}$ c. $\frac{7}{26}$

2.26 a. $\frac{470}{399}$ b. $\frac{105}{8}$ c. $-\frac{1463}{5220}$

3. Machten en wortels

3.1 a. 8 b. 9 c. 1024 d. 625 e. 256

3.2 a. -8 b. 9 c. -1024 d. 625 e. 64

3.3 a. $\frac{1}{8}$ b. $\frac{1}{16}$ c. $\frac{1}{81}$ d. $\frac{1}{7}$ e. $\frac{1}{128}$

3.4 a. 1 b. $\frac{1}{9}$ c. $\frac{1}{121}$ d. $\frac{1}{729}$ e. $\frac{1}{10000}$

3.5 a. $-\frac{1}{64}$ b. $\frac{1}{81}$ c. $-\frac{1}{27}$ d. 16 e. $\frac{1}{16}$

3.6 a. 1 b. 0 c. $\frac{1}{12}$ d. 49 e. $-\frac{1}{128}$

3.7 a. $\frac{4}{9}$ b. $\frac{1}{16}$ c. $\frac{64}{125}$ d. $\frac{4}{49}$

3.8 a. $\frac{9}{4}$ b. 8 c. $\frac{9}{7}$ d. $\frac{16}{81}$

3.9 a. $\frac{9}{16}$ b. 16 c. $\frac{5}{4}$ d. $\frac{243}{32}$

3.10 a. 4 b. 1 c. $\frac{64}{27}$ d. $\frac{16}{625}$

3.11 a. $\frac{36}{49}$ b. 1 c. $\frac{49}{36}$ d. $\frac{8}{343}$

3.12 a. $\frac{64}{729}$ b. $\frac{27}{125}$ c. $\frac{25}{121}$ d. 32

3.13 a. 6 b. 9 c. 11 d. 8 e. 13

3.14 a. 15 b. 4 c. 14 d. 16 e. 21

3.15 a. $2\sqrt{2}$ b. $2\sqrt{3}$ c. $3\sqrt{2}$ d. $2\sqrt{6}$ e. $5\sqrt{2}$

3.16 a. $6\sqrt{2}$ b. $4\sqrt{2}$ c. $2\sqrt{5}$ d. $7\sqrt{2}$ e. $2\sqrt{10}$

3.17 a. $3\sqrt{6}$ b. $3\sqrt{11}$ c. $4\sqrt{5}$ d. $4\sqrt{6}$ e. $10\sqrt{2}$

3.18 a. $7\sqrt{3}$ b. $11\sqrt{2}$ c. $5\sqrt{5}$ d. $6\sqrt{6}$ e. $12\sqrt{2}$

3.19 a. $15\sqrt{3}$ b. $9\sqrt{5}$ c. $16\sqrt{2}$ d. $13\sqrt{2}$ e. $14\sqrt{3}$

3.20 a. $11\sqrt{11}$ b. $18\sqrt{3}$ c. 45 d. $19\sqrt{2}$ e. 26

3.21 a. $3\sqrt{2}$ b. $5\sqrt{6}$ c. $-42\sqrt{6}$ d. $-220\sqrt{6}$ e. $36\sqrt{35}$

3.22 a. $\sqrt{15}$ b. $-\sqrt{14}$ c. $\sqrt{30}$ d. $12\sqrt{21}$ e. $-240\sqrt{3}$

3.23 a. 720 b. -1000 c. $-84\sqrt{15}$ d. $-90\sqrt{7}$ e. $3024\sqrt{5}$

3.24 a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{9}{2}$ c. $\frac{3}{2}$ d. $\frac{2}{27}\sqrt{2}$ e. $6\sqrt{6}$

3.25 a. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ b. $\frac{2}{9}\sqrt{6}$ c. $\frac{49}{64}$ d. $\frac{3}{4}\sqrt{6}$ e. $\frac{32}{27}\sqrt{3}$

3.26 a. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ b. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ c. $\frac{1}{5}\sqrt{30}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{14}$ e. $\frac{1}{7}\sqrt{14}$

3.27 a. $\frac{1}{6}\sqrt{15}$ b. $\frac{1}{9}\sqrt{12}$ c. $\frac{1}{10}\sqrt{45}$ d. $\frac{1}{5}\sqrt{10}$ e. $\frac{1}{8}\sqrt{14}$

3.28 a. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ b. $\frac{1}{3}\sqrt{15}$ c. $\frac{1}{11}\sqrt{77}$ d. $\frac{1}{5}\sqrt{55}$ e. $\frac{1}{11}\sqrt{22}$

3.29 a. $\frac{1}{2}\sqrt{30}$ b. $\frac{1}{5}\sqrt{30}$ c. $\frac{4}{5}\sqrt{15}$ d. $-\frac{1}{3}\sqrt{30}$ e. $2\sqrt{2}$

3.30 a. 2 b. 3 c. 5 d. 4 e. 6

3.31 a. -3 b. 2 c. 3 d. -2 e. 12

3.32 a. $2\sqrt[3]{2}$ b. $3\sqrt[4]{3}$ c. $5\sqrt[3]{3}$ d. $2\sqrt[5]{3}$ e. $3\sqrt[3]{2}$

3.33 a. $-2\sqrt[3]{5}$ b. $2\sqrt[4]{4}$ c. $2\sqrt[5]{10}$ d. $6\sqrt[3]{2}$ e. $2\sqrt[6]{3}$

3.34 a. $\sqrt[3]{35}$ b. $\sqrt[4]{56}$ c. $2\sqrt[3]{3}$ d. $3\sqrt[4]{10}$ e. $2\sqrt[5]{6}$

3.35 a. 6 b. $6\sqrt[3]{2}$ c. $3\sqrt[5]{5}$ d. $6\sqrt[6]{2}$ e. $10\sqrt[3]{7}$

3.36 a. $\frac{1}{7}$ b. bestaat niet c. $-\frac{2}{3}$ d. $\frac{6}{11}$ e. $\frac{6}{5}$

3.37 a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{5}{2}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{3}{5}$ e. $\frac{12}{5}$

3.38 a. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ b. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{6}$ c. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$ d. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{15}$ e. $\frac{1}{2}\sqrt[6]{24}$

3.39 a. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{45}$ b. $\frac{1}{6}\sqrt[4]{126}$ c. $\frac{1}{6}\sqrt[5]{60}$ d. $\frac{1}{10}\sqrt[3]{90}$

3.40 a. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$ b. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ c. $\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}$ d. $\frac{1}{3}\sqrt[6]{54}$

3.41 a. $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$ b. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{12}$ c. $-\frac{1}{3}\sqrt[5]{63}$ d. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{210}$

3.42 a. $\sqrt{2}$ b. $\sqrt{27}$ c. $\sqrt[3]{49}$ d. $\sqrt[4]{3125}$ e. $\sqrt[3]{256}$

3.43 a. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ b. $\sqrt{\frac{1}{343}}$ c. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d. $\sqrt[5]{\frac{1}{81}}$ e. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

3.44 a. $5^{\frac{1}{3}}$ b. $7^{\frac{1}{2}}$ c. $2^{\frac{1}{4}}$ d. $12^{\frac{1}{6}}$ e. $5^{\frac{1}{5}}$

3.45 a. $5^{-\frac{1}{2}}$ b. $6^{-\frac{1}{3}}$ c. $2^{-\frac{5}{4}}$ d. $3^{\frac{1}{2}}$ e. $7^{\frac{4}{5}}$

3.46 a. $2^{\frac{2}{3}}$ b. $2^{\frac{3}{2}}$ c. $2^{\frac{5}{4}}$ d. $2^{\frac{2}{3}}$ e. $2^{\frac{5}{3}}$

3.47 a. $2^{\frac{3}{2}}$ b. $2^{-\frac{3}{2}}$ c. $2^{\frac{7}{3}}$ d. $2^{\frac{1}{4}}$ e. $2^{-\frac{10}{3}}$

3.48 a. $\sqrt[6]{32}$ b. $\sqrt[6]{243}$ c. $4\sqrt[12]{2}$ d. $3\sqrt[15]{81}$ e. 4

3.49 a. $7\sqrt[6]{7}$ b. $3\sqrt[6]{3}$ c. $\sqrt[6]{3125}$ d. $3\sqrt[20]{3^{11}}$ e. 7

3.50 a. $\sqrt[6]{2}$ b. $\sqrt[6]{3}$ c. $\sqrt[4]{2}$ d. $\sqrt[15]{3}$ e. $\frac{1}{2}\sqrt[6]{32}$

II Algebra

4. Rekenen met letters

4.1 a. 18 b. -6 c. 102 d. -108 e. 9

4.2 a. 12 b. 6 c. 24 d. -10 e. -20

4.3 a. 40 b. -32 c. -16 d. -8 e. 64

4.4 a. -15 b. -45 c. -45 d. -77 e. 25

4.5 a. 36 b. 96 c. -192 d. 36 e. -54

4.6 a. 20 b. -36 c. 72 d. 42 e. 29

4.7 a. 320 b. -55 c. 30 d. 6075 e. 8100

4.8 a. 56 b. 196 c. -56 d. 15 e. 16

4.9 a. -3 b. $-\frac{9}{8}$ c. 3 d. $-\frac{3}{4}$ e. $-\frac{51}{70}$

4.10 a. $\frac{2}{3}$ b. 25 c. $-\frac{4}{3}$ d. $-\frac{5}{6}$ e. $-\frac{101}{45}$

4.11 a. a^8 b. b^5 c. a^{11} d. b^4 e. a^{14}

4.12 a. a^6 b. b^{12} c. a^{25} d. b^8 e. a^{54}

4.13 a. a^4b^4 b. a^4b^6 c. $a^{12}b^3$ d. a^8b^{12} e. $a^{15}b^{20}$

4.14 a. a^8 b. $6a^{10}$ c. $60a^6$ d. $210a^8$ e. $6a^6$

4.15 a. $8a^6$ b. $81a^{12}b^{16}$ c. $16a^4b^4$ d. $125a^{15}b^9$ e. $16a^4b^{20}$

4.16 a. $15a^3b^5$ b. $24a^9b^6$ c. $6a^5b^5$ d. $35a^{12}b^8$ e. $144a^8b^{10}$

4.17 a. $24a^{10}$ b. $120a^{10}$ c. $40a^{11}$ d. $18a^{15}$ e. $-24a^7$

4.18 a. $-8a^6$ b. $9a^6$ c. $625a^{16}$ d. $-a^{10}b^{20}$ e. $-128a^{21}b^{35}$

4.19 a. $12a^8$ b. $72a^{12}$ c. $-135a^{18}$ d. $750a^{16}$ e. $320a^{12}$

4.20 a. $18a^7b^{10}$ b. $-72a^{10}b^{22}$ c. $-64a^{12}b^6$ d. $-324a^{16}b^{18}$ e. $1152a^{18}b^{13}$

4.21 a. $72a^7b^{12}c^{17}$ b. $-64a^{12}b^{21}c^{16}$ c. $-810a^{15}b^{10}c^{12}$ d. $1000000a^{24}b^{16}c^{22}$
e. $108a^{12}b^{12}c^{12}$

4.22 a. a^{36} b. $16a^{24}$ c. $1296a^{26}b^{24}$ d. $-32a^{35}$ e. $-108a^{36}$

4.23 a. $6a+15$ b. $40a-16$ c. $-15a+10$ d. $-60a+12$ e. $-49a-42$

4.24 a. $2a^2-10a$ b. $14a^2+84a$ c. $-117a^2+65a$ d. $64a^2-120a$ e. $-63a^2-189a$

4.25 a. $2a^3+18a$ b. $12a^3-21a^2$ c. $-10a^4-20a^2$ d. $9a^4+18a^3$ e. $-3a^3+12a^2$

4.26 a. $12a^4+8a^3+12a^2$ b. $-6a^5-15a^4+3a^3$ c. $14a^5+21a^4-42a^3$
d. $-72a^5-24a^4+12a^3-12a^2$ e. $-15a^6-5a^4+10a^2$

4.27 a. $6a+8b$ b. $-10a+25b$ c. $2a^2+4ab$ d. $-64a^2+96ab$ e. $-176a^2+242ab$

4.28 a. $27a^2+15ab-36a$ b. $14a^3-12a^2b$ c. $-56a^3-32a^2b+8a^2$

d. $-12a^3 + 12a^2b + 12a^2$ e. $-169a^3 - 156a^2b + 182a^2$

4.29 a. $6a^4 + 4a^2b - 6a^2$ b. $-10a^5 - 5a^4 + 10a^3b$ c. $6a^2b^2 + 4b^4$
d. $-8a^5 + 20a^3b^2 - 8a^3b$ e. $-196a^2b^3 - 28ab^3 + 70b^5$

4.30 a. $2a^4 + 6a^3b$ b. $-15a^4 - 10a^3b + 15a^2b^2$ c. $6a^6 + 4a^5b^2 - 2a^3b^2$
d. $-6a^7 - 6a^6b^2 - 6a^5b^2$ e. $-49a^6 + 21a^5b - 28a^4b^2$

4.31 a. $2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3$ b. $15a^3b^2 - 10a^2b^3 + 30ab^2$ c. $12a^3b^3 - 30a^2b^3 - 6ab^4$
d. $144a^4b^4 - 72a^3b^3 + 144a^2b^2$ e. $12a^3b^3 + 54a^2b^3 - 6a^2b^4$

4.32 a. $-5a^5b^5 + 2a^5b^4 - a^4b^5$ b. $a^5b^5 + a^4b^4 + 14a^2b^3$ c. $-15a^7b^7 - 90a^6b^6 + 15a^5b^7$
d. $-13a^9b^9 + 12a^7b^7 - 9a^6b^9$ e. $-49a^5b^2 - 49a^3b^4 - 7a^2b^2$

4.33 a. $2a^2 + 8a - 8$ b. $-12a^2 - 22a - 6$ c. $-9a$ d. $-8a^2 + 66a - 10$
e. $10a^2 - 15a - 5$ f. $-2a^2 - 3a + 1$

4.34 a. $3a^2 + 8ab - 2b$ b. $-a^2 + b$ c. $4a^2 + 4ab - 2b^2 - 2a + 2b$
d. $-2a^2 - 2b^2 + 6a - 3b$ e. $5a^2 + 30ab - 2b^2 + 2a^2b^2$

4.35 a. $6(a + 2)$ b. $4(3a + 4)$ c. $3(3a - 4)$ d. $5(3a - 2)$ e. $27(a + 3)$

4.36 a. $3(a - 2b + 3)$ b. $4(3a + 2b - 4)$ c. $3(3a + 4b + 1)$ d. $6(5a - 4b + 10)$
e. $12(2a + 5b - 3)$

4.37 a. $-3(2a - 3b + 5)$ b. $-7(2a - 5b + 3)$ c. $-6(3a + 4b - 2c)$
d. $-14(2a + 5b - 3c)$ e. $-9(5a - 3b + 7c + 2)$

4.38 a. $a(a + 1)$ b. $a^2(a - 1)$ c. $a(a^2 - a + 1)$ d. $a^2(a^2 + a - 1)$ e. $a^3(a^3 - a + 1)$

4.39 a. $3a(a + 2)$ b. $3a(3a^2 + 2a - 1)$ c. $5a^2(3a^2 - 2a + 5)$ d. $9a^2(3a^4 - 2a^2 - 4)$
e. $12a(4a^3 - 2a^2 + 3a + 5)$

4.40 a. $3ab(a + 2)$ b. $9ab(a - b)$ c. $4ab(3b - 1)$ d. $7ab^2(2a - 3)$ e. $3a^2b(6b - 5)$

4.41 a. $3a^2b(ab + 6)$ b. $3a^2b(a^2b^2 - 3ab + 4)$ c. $5abc(2a^2bc - ac - 3)$
d. $4a^3b^4c^3(2a^3bc - 3a + 5)$ e. $a^3b^3c(c^2 + c + 1)$

4.42 a. $2a^2bc^2(-2b^2 + b - 3)$ b. $a^3b^5c^3(a^3c - abc - b^2)$ c. $-2a^2c^2(ac^2 - b^2c + 2b)$
d. $-a^5b^6(a^2 - ab + 1)$ e. $-a^6b^6c^6(a^2b + ac - 1)$

4.43 a. $(a + 3)(b + 3)$ b. $(a - 2)(b - 1)$ c. $(2a + 7)(b + 4)$
d. $(a^2 + 2)(2b - 1)$ e. $(a - 1)(b - 2)$

4.44 a. $a(a - 1)(b + 1)$ b. $6(a + 2)(2b + 1)$ c. $-2(a - 2)(b - 1)$
d. $a^2(a - 1)(4b + 3)$ e. $-3a(2a + 3)(2b + 3)$

4.45 a. $(a + 4)(b + 1)$ b. $2b(2a - 1)$ c. $(3a + 2)(2b - 1)$
d. $(2a + 1)(a + 3)$ e. $(a + 2)(a + 1)$

4.46 a. $2(a + 5)(a + 3)$ b. $(a + 1)(a + 3)(b + 1)$ c. $-3(a - 1)(a + 2)$
d. $12(a - 1)(a + 2)(a - 2)$ e. $4(a + 1)(a + 4)^2$

4.47 a. $a^2 + 4a + 3$ b. $2a^2 + 9a + 9$ c. $3a^2 - 17a - 6$ d. $20a^2 - 9a - 20$
e. $6a^2 + 3a - 45$ f. $24a^2 + 12a - 120$

4.48 a. $-24a^2 + 73a - 24$ b. $56a^2 + 19a - 132$ c. $17a^2 - 288a - 17$ d. $6a^2 - 6a - 36$

e. $ab - 5a + 3b - 15$ f. $6ab + 10a + 24b + 40$

4.49 a. $-4ab + 4a + b - 1$ b. $-3ab + 9a + b - 3$ c. $156ab - 169a + 144b - 156$
d. $a^3 - 4a^2 + 4a - 16$ e. $a^3 - a^2 + 7a - 7$ f. $a^4 + 12a^2 + 27$

4.50 a. $2a^3 + 14a^2 - 7a - 49$ b. $6a^4 - 13a^2 + 6$ c. $2a^4 + 3a^3 - 2a^2$
d. $-6a^4 + 23a^3 - 20a^2$ e. $-6a^4 - 6a^3 + 5a^2 + 5a$ f. $18a^4 - 49a^3 - 49a^2$

4.51 a. $-24a^4 + 55a^3 + 24a^2$ b. $-10a^5 + 13a^3 - 4a$ c. $-a^5 + a^3$
d. $54a^7 + 18a^6 - 30a^5 - 10a^4$ e. $56a^6 - 35a^4 - 8a^3 + 5a$ f. $24a^8 + 38a^7 + 15a^6$

4.52 a. $6a^2b^2 - 2ab^2 + 3a^2b - ab$ b. $6a^3b^3 - 9a^3b^2 + 2a^2b^3 - 3a^2b^2$
c. $-4a^3b^4 + 10a^3b^3 - 6a^3b^2$ d. $-32a^5b^5 - 16a^4b^4 + 24a^3b^6 + 12a^2b^5$
e. $-a^8b^8 + 2a^6b^{10} - a^4b^{12}$ f. $2a^3 + 7a^2 + 2a - 6$

4.53 a. $-12a^3 + 11a^2 - 5a + 2$ b. $2a^2 + 3ab + 8a + b^2 + 4b$
c. $-9a^2 + 18ab + 9a - 9b^2 - 9b$ d. $18a^2 - 81ab + 13a - 18b + 2$
e. $a^4 + a$ f. $6a^3 + 10a^2 + a - 2$

4.54 a. $2a^3 + 7a^2 + 11a + 4$ b. $a^2 - b^2 - a - b$
c. $a^4 + a^3b - ab^3 - b^4$ d. $a^3 + 6a^2 + 11a + 6$
e. $a^3 - 2a^2 - 5a + 6$ f. $4a^3 + 4a^2 - 5a - 3$

4.55 a. $4a^3 - 4a^2b - ab^2 + b^3$ b. $60a^3 - 133a^2b + 98ab^2 - 24b^3$
c. $-3a^4 + 6a^3 - 9a^2 + 18a$ d. $3a^3 + 5a^2 - 11a + 3$
e. $2a^6 + 2a^4 - 4a^2$ f. $a^4b^3 + a^3b^4 + a^4b^2 - a^2b^4 - a^3b^2 - a^2b^3$

4.56 a. $6a^5b + 6a^4b^2 - 6a^3b^3 - 6a^2b^4$ b. $a^4 + 2a^3 + a + 2$
c. $a^4 + a^3 + a^2 + 3a + 2$ d. $-6a^4 + 13a^3 - a^2 - 5a - 1$
e. $3a^5 - 6a^4 + 15a^3 - 6a^2 + 12a$ f. $10a^2 + ab - 21a - 2b^2 + 12b - 10$

5. Merkwaardige producten

5.1 a. $a^2 + 12a + 36$ b. $a^2 - 4a + 4$ c. $a^2 + 22a + 121$ d. $a^2 - 18a + 81$
e. $a^2 + 2a + 1$

5.2 a. $b^2 + 10b + 25$ b. $b^2 - 24b + 144$ c. $b^2 + 26b + 169$ d. $b^2 - 14b + 49$
e. $b^2 + 16b + 64$

5.3 a. $a^2 + 28a + 196$ b. $b^2 - 10b + 25$ c. $a^2 - 30a + 225$ d. $b^2 + 4b + 4$
e. $a^2 - 20a + 100$

5.4 a. $4a^2 + 20a + 25$ b. $9a^2 - 36a + 36$ c. $121a^2 + 44a + 4$ d. $16a^2 - 72a + 81$
e. $169a^2 + 364a + 196$

5.5 a. $25b^2 + 20b + 4$ b. $4a^2 - 12a + 9$ c. $81b^2 + 126b + 49$ d. $16a^2 - 24a + 9$
e. $64b^2 + 16b + 1$

5.6 a. $4a^2 + 20ab + 25b^2$ b. $9a^2 - 78ab + 169b^2$ c. $a^2 + 4ab + 4b^2$ d. $4a^2 - 4ab + b^2$
e. $36a^2 + 84ab + 49b^2$

5.7 a. $144a^2 - 120ab + 25b^2$ b. $4a^2 - 4ab + b^2$ c. $49a^2 - 70ab + 25b^2$
d. $196a^2 - 84a + 9$ e. $a^2 + 22ab + 121b^2$

5.8 a. a^4+10a^2+25 b. a^4-6a^2+9 c. b^4-2b^2+1 d. a^6+4a^3+4
e. b^8-14b^4+49

5.9 a. $4a^2+28ab+49b^2$ b. $9a^2+48ab+64b^2$ c. $25a^2-90ab+81b^2$
d. $49a^2-112ab+64b^2$ e. $36a^2-132ab+121b^2$

5.10 a. a^4+6a^2+9 b. b^4-8b^2+16 c. $4a^6-52a^3+169$ d. $25b^4+140b^2+196$
e. $144a^6+120a^3+25$

5.11 a. $4a^4-12a^2b+9b^2$ b. $9a^4+12a^2b+4b^2$ c. $81a^4-90a^2b^2+25b^2$
d. $144a^6+48a^3b^2+4b^4$ e. $400a^4-240a^2b^3+36b^6$

5.12 a. $5a^2+10a+10$ b. $-18a+9$ c. $5a^2+6a-8$ d. $5a^2+8ab+5b^2$
e. $-32a^4-32b^4$

5.13 a. $(a+4)(a-4)$ b. $(a+1)(a-1)$ c. $(a+12)(a-12)$
d. $(a+9)(a-9)$ e. $(a+11)(a-11)$

5.14 a. $(a+6)(a-6)$ b. $(a+2)(a-2)$ c. $(a+13)(a-13)$
d. $(a+16)(a-16)$ e. $(a+32)(a-32)$

5.15 a. $(2a+3)(2a-3)$ b. $(3a+1)(3a-1)$ c. $(4a+5)(4a-5)$
d. $(5a+9)(5a-9)$ e. $(12a+13)(12a-13)$

5.16 a. $(6a+7)(6a-7)$ b. $(8a+11)(8a-11)$ c. $(20a+21)(20a-21)$
d. $(14a+15)(14a-15)$ e. $(12a+7)(12a-7)$

5.17 a. $(a+b)(a-b)$ b. $(2a+5b)(2a-5b)$ c. $(3a+b)(3a-b)$
d. $(4a+9b)(4a-9b)$ e. $(14a+13b)(14a-13b)$

5.18 a. $(ab+2)(ab-2)$ b. $(ab+25)(ab-25)$ c. $(3ab+5c)(3ab-5c)$
d. $(5a+4bc)(5a-4bc)$ e. $(10ab+3c)(10ab-3c)$

5.19 a. $(a^2+b)(a^2-b)$ b. $(5a^2+4b)(5a^2-4b)$ c. $(4a^2+b^2)(2a+b)(2a-b)$
d. $(9a^2+4b^2)(3a+2b)(3a-2b)$ e. $(16a^2+25b^2)(4a+5b)(4a-5b)$

5.20 a. $(a^2b+1)(a^2b-1)$ b. $(ab^2+c)(ab^2-c)$ c. $(a^2+9b^2c^2)(a+3bc)(a-3bc)$
d. $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$ e. $(16a^4+b^4)(4a^2+b^2)(2a+b)(2a-b)$

5.21 a. $a(a+1)(a-1)$ b. $2(2a+5)(2a-5)$ c. $3(3a+2b)(3a-2b)$
d. $5a(5a+3)(5a-3)$ e. $6a^3(10a+2)(10a-2)$

5.22 a. $3b(ab+3)(ab-3)$ b. $2ab(8ab+3)(8ab-3)$ c. $a^2b(a^2b+1)(a^2b-1)$
d. $5abc(5+ab)(5-ab)$ e. $3b(a+1)(a-1)$

5.23 a. $a(a^2+1)(a+1)(a-1)$ b. $2a(a^2+4)(a+2)(a-2)$
c. $ab(a^2b^2+9)(ab+3)(ab-3)$ d. $a(25-a^3)(25+a^3)$
e. $ab(a^4+16b^4)(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$

5.24 a. $2a+5$ b. $(3a+1)(a-3)$ c. $(3a+8)(2-a)$
d. $4a(2-2a)=8a(1-a)$ e. $(5a+3)(-a-1)$

5.25 a. a^2-4 b. a^2-49 c. a^2-9 d. a^2-144 e. a^2-121

5.26 a. $4a^2-25$ b. $9a^2-1$ c. $16a^2-9$ d. $81a^2-144$ e. $169a^2-196$

5.27 a. $36a^2 - 81$ b. $225a^2 - 1$ c. $49a^2 - 64$ d. $256a^2 - 25$ e. $441a^2 - 625$

5.28 a. $a^4 - 25$ b. $a^4 - 81$ c. $4a^4 - 9$ d. $36a^4 - 25$ e. $81a^4 - 121$

5.29 a. $a^6 - 16$ b. $a^{10} - 100$ c. $81a^4 - 4$ d. $121a^8 - 9$ e. $144a^8 - 169$

5.30 a. $4a^2 - 9b^2$ b. $36a^2 - 100b^2$ c. $81a^2 - 4b^2$ d. $49a^2 - 25b^2$ e. $a^2 - 400b^2$

5.31 a. $a^4 - b^2$ b. $4a^4 - 9b^2$ c. $25a^4 - 9b^4$ d. $36a^4 - 121b^4$ e. $169a^4 - 225b^4$

5.32 a. $a^6 - 4b^4$ b. $4a^4 - 81b^6$ c. $25a^8 - 9b^6$ d. $49a^4 - 361b^8$ e. $225a^{10} - 64b^8$

5.33 a. $4a^2b^2 - c^2$ b. $9a^4b^2 - 4c^2$ c. $25a^2b^4 - c^4$ d. $81a^4b^4 - 16c^4$ e. $324a^6b^4 - 49c^6$

5.34 a. $4a^4 - 9b^2c^4$ b. $49a^6b^2 - 64c^6$ c. $169a^{10}b^6 - 196c^{10}$ d. $25a^2b^2c^2 - 1$
e. $81a^4b^2c^6 - 49$

5.35 a. $a^2 + 8a + 16$ b. $a^2 - 16$ c. $a^2 + 7a + 12$ d. $4a + 12$ e. $a^2 - a - 12$

5.36 a. $a^2 - a - 42$ b. $a^2 + 14a + 49$ c. $a^2 - 36$ d. $a^2 - 12a + 36$
e. $2a^2 - 6a - 36$

5.37 a. $a^2 + 26a + 169$ b. $a^2 - 28a + 196$ c. $a^2 - a - 182$ d. $3a^2 - 26a - 169$
e. $182a^2 - 27a - 182$

5.38 a. $4a^2 + 32a + 64$ b. $a^2 - 10a + 16$ c. $3a^2 - 18a$ d. $4a^2 - 64$ e. $2a^2 + 8a + 8$

5.39 a. $a^2 - 13a - 68$ b. $a^2 - 34a + 289$ c. $a^2 + 13a - 68$ d. $16a^2 - 289$
e. $68a^2 + 273a - 68$

5.40 a. $a^2 + 42a + 441$ b. $a^2 + 9a - 252$ c. $441a^2 - 144$ d. $a^2 - 24a + 144$
e. $12a^2 + 123a - 252$

5.41 a. $a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 8a - 4$ b. $a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 8a - 4$ c. $a^4 - 2a^2 + 1$
d. $4a^4 + 24a^3 + 5a^2 - 24a - 9$ e. $4a^4 + 12a^3 + 5a^2 - 12a - 9$

5.42 a. $a^4 - 2a^2 + 1$ b. $a^4 - 2a^2 + 1$ c. $a^4 - 2a^2 + 1$ d. $16a^4 - 72a^2 + 81$
e. $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

5.43 a. $a^4 - 1$ b. $8a^3 - 18a$ c. $a^4 - 16$ d. $54a^6 - 24a^4$ e. $2a^5 - 1250a$

5.44 a. 391 b. 2475 c. 4899 d. 8091 e. 4884

5.45 a. $2a^2 + 12a + 26$ b. $2a^2 - 2a - 24$ c. $12a$ d. $6a^2 - 8a - 6$ e. $10a - 2$

5.46 a. $42a - 98$ b. $-12a^2 - 28a$ c. $-a^4 + 81a^2 + 36a + 8$ d. $9a^2 + 2$ e. $2a^4 + 2a^2$

5.47 a. $a^4 - 5a^2 + 4$ b. $a^4 - 41a^2 + 400$ c. $a^8 - 5a^4 + 4$ d. $a^3 + 4a^2 + 5a + 2$
e. $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

5.48 a. $-a^3 - 14a^2 - 25a$ b. $4a^2 + 8a$ c. $-a^3 + 25a^2 - 6a$
d. $5a^3 - 25a^2 + 125a - 625$ e. $2a^3 - a^2 + 3$

6. Breuken met letters

6.1 a. $\frac{a}{a-3} + \frac{3}{a-3}$ b. $\frac{2a}{a-b} + \frac{3b}{a-b}$ c. $\frac{a^2}{a^2-3} + \frac{3a}{a^2-3} + \frac{1}{a^2-3}$ d. $\frac{2a}{ab-3} - \frac{b}{ab-3} + \frac{3}{ab-3}$
e. $\frac{2}{b-a^3} - \frac{5a}{b-a^3}$

6.2 a. $\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{a^2-b^2}$ b. $\frac{ab}{a-2b}+\frac{bc}{a-2b}-\frac{ca}{a-2b}$ c. $\frac{b^2}{a^2-1}-\frac{1}{a^2-1}$ d. $\frac{4abc}{c-ab}+\frac{5}{c-ab}$
e. $\frac{5ab^2}{ab-c}-\frac{abc}{ab-c}$

6.3 a. $\frac{6}{a^2-9}$ b. $\frac{2a}{a^2-9}$ c. $\frac{a+9}{a^2-9}$ d. $\frac{a^2-2a+3}{a^2-9}$ e. $\frac{6a}{a^2-9}$

6.4 a. $\frac{7a+1}{a^2+a-6}$ b. $\frac{2a^2+2}{a^2-1}$ c. $\frac{-a}{a^2+7a+12}$ d. $\frac{5a^2-10a+7}{a^2-3a+2}$ e. $\frac{12a}{a^2+2a-8}$

6.5 a. $\frac{a^2-3ab+b^2}{a^2-3ab+2b^2}$ b. $\frac{2a}{a^2-b^2}$ c. $\frac{-2a^2+2a+2ab-4}{a^2-2a-ab+2b}$ d. $\frac{a^2-ab+2a+3b}{2a^2+ab-3b^2}$ e. $\frac{2ab+6a}{a^2-9}$

6.6 a. $\frac{2ab+2ac}{a^2-c^2}$ b. $\frac{3a^2-a+ab+3b}{a^2-b^2}$ c. $\frac{16a+4b-4a^2-ab-a^2b-4ab^2}{4a^2+17ab+4b^2}$ d. $\frac{a^2-ab-5ac+3bc+2b^2+2b-2c}{ab-b^2-ac+bc}$
e. $\frac{2a+2a^2+2b+8}{a^2-b^2-8b-16}$

6.7 a. $\frac{a+6}{3b-2}$ b. a c. $\frac{2}{a}$ d. $\frac{1}{a-2b}$ e. $\frac{a+b^2}{b-3}$

6.8 a. $\frac{a+b}{3c}$ b. $\frac{a-4}{1+2a}$ c. $\frac{4b-3b^2}{a-bc}$ d. $\frac{a+b}{a-b}$ e. a^2+b

6.9 a. $\frac{a+2}{a^2-9}$ b. $\frac{3}{a^2-9}$ c. $\frac{6a^2+2a}{a-9}$ d. -1 e. $\frac{2a}{a+1}$

6.10 a. $\frac{6ab-3b^2}{a^2-ab-2b^2}$ b. $\frac{a^2-ab+b}{a-b}$ c. $\frac{1}{a-2}$ d. $\frac{11a^2-5ab-3b^2}{3a^2-3ab}$ e. $\frac{4-3a}{2a}$

III Getallenrijen

7. Faculteiten en binomiaalcoëfficiënten

7.1 a. a^3+3a^2+3a+1 b. a^3-3a^2+3a-1 c. $8a^3-12a^2+6a-1$
d. $a^2+6a^2+12a+8$ e. $8a^3-36a^2+54a-27$

7.2 a. $1-3a^2+3a^4-a^6$ b. $a^3b^3+3a^2b^2+3ab+1$ c. $a^3+6a^2b+12b^2+8b^3$
d. $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$ e. $8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$

7.3 a. $9a^3-18a^2+18a-9$ b. $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^2$
c. $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$ d. $125a^3+150a^2+60a+8$ e. $2a^3+294a$

7.4 a. $a^6-3a^4b+3a^2b^2-b^3$ b. $a^{12}+6a^8b^2+12a^4b^4+8b^6$
c. $2a^3+24ab^2$ d. $12ab^2+16b^3$ e. $-7a^3-6a^b+6ab^2+7b^3$

7.5 a. $a^4+4a^3+6a^2+4a+1$ b. $a^4-4a^3+6a^2-4a+1$
c. $16a^4-32a^3+24a^2-8a+1$ d. $a^4+8a^3+24a^2+32a+16$
e. $16a^4-96a^3+216a^2-216a+81$

7.6 a. $a^8-4a^6+6a^2-4a^2+1$ b. $a^4b^4+4a^3b^3+6a^2b^2+4ab+1$
c. $a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4$ d. $a^8-4a^6b^2+6a^4b^4-4a^2b^6+b^8$
e. $2a^4+12a^2b^2+2b^4$

7.7 1 8 28 56 70 56 28 8 1 $(n=8)$
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 $(n=9)$
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1 $(n=10)$

7.8 $a^8+8a^7+28a^6+56a^5+70a^4+56a^3+28a^2+8a+1$,
$a^9-9a^8+36a^7-84a^6+126a^5-126a^4+84a^3-36a^2+9a-1$,
$a^{10}-10a^9b+45a^8b^2-120a^7b^3+210a^6b^4-252a^5b^5+210a^4b^6-120a^3b^7+45a^2b^8-10ab^9+b^{10}$

7.9 t.e.m. 7.11 zelf controleren; voor 7.12 t.e.m. 7.15 zie de (tot $n = 10$ aangevulde) driehoek van Pascal.

7.16 a. 1 b. 15 c. 1287 d. 210 e. 3060

7.17 a. 792 b. 462 c. 1128 d. 18424 e. 1225

7.18 a. 680 b. 51 c. 220

7.19 a. 11480 b. 1716 c. 80730

7.20 a. 76076 b. 2002 c. 20475

7.21 a. $\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}a^{7-k}$ b. $\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}a^{12-k}(-1)^k$ c. $\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}a^{12-k}10^k$
d. $\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(2a)^{9-k}(-1)^k$ e. $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(2a)^{10-k}b^k$

7.22 a. $\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}a^{7-k}5^k$ b. $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-a)^k$ c. $\sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k}(ab)^{18-k}$
d. $\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}a^{9-k}(2b)^k$ e. $\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}a^{8-k}(-b)^k$

7.23 a. 2^8 $(a=b=1)$ b. 0 $(a=1, b=-1)$ c. 3^8 $(a=1, b=2)$

7.24 a. 1 $(a=1, b=-2)$ b. 2^n $(a=1, b=1)$ c. 0 $(a=1, b=-1)$

7.25 a. 91 b. 0 c. 70

7.26 a. 25 b. $\frac{47}{6}$ c. 978

8. Rijen en limieten

8.1 a. 2007006 b. 494550 c. 750000 d. 49800 e. 9899100 f. 9902700

8.2 a. 670 b. 16958 c. 3892 d. 570 e. 25250

8.3 49 (de som van alle even startnummers is $\frac{1}{2}\times 48\times 98$, de som van alle oneven startnummers is $\frac{1}{2}\times 49\times 98$)

8.4 a. 510 b. $\frac{511}{256}$ c. 2186 d. $\frac{1330}{729}$ e. 0.3333333

8.5 a. 8 b. 3 c. $\frac{8}{15}$ d. $\frac{70}{9}$ e. $\frac{10}{19}$

8.6 a. $\frac{1}{9}$ b. $\frac{1}{3}$ c. 1 d. $\frac{4}{33}$ e. $\frac{98}{101}$

8.7 a. $\frac{2}{9}$ b. $\frac{31}{99}$ c. 2 d. $\frac{41}{333}$ e. $\frac{37}{300}$

8.8 a. $\frac{10}{99}$ b. $\frac{110}{333}$ c. $\frac{1210}{999}$ d. $\frac{1}{9000}$ e. $\frac{3061}{990}$

8.9 a. $\frac{1001}{45}$ b. $\frac{700}{999}$ c. $\frac{233}{333}$ d. $\frac{1828}{225}$ e. $\frac{112}{99}$

8.10 a. $\frac{11111}{100000}$ b. $\frac{181}{495}$ c. $\frac{31412}{9999}$ d. $\frac{271801}{99990}$ e. $\frac{1}{11}$

8.11 a. 1 b. 2 c. 1 d. $\frac{1}{3}$ e. 0 f. $\frac{2}{5}$

8.12 a. 2 b. 0 c. ∞ d. 1 e. 1 f. 0

8.13 a. 1 b. ∞ c. $\frac{4}{3}$ d. 1 e. $\frac{4}{5}$

8.14 a. 0 b. 1 c. 2 d. 1 e. 0 (schrijf $2^{3n} = 8^n$ en $3^{2n} = 9^n$)

8.15 a. 0 b. deze limiet bestaat niet c. 1 d. 1 e. ∞

8.16 a. -1 b. ∞ c. -1 d. 0 (want $(3n)! = n! \times (n+1)(n+2)\cdots 3n > n! \times n^n$, etc.) e. 0

8.17 a. 0 b. ∞ c. ∞ d. 0 e. ∞

8.18 a. 0 b. 0 c. ∞ d. 0 e. ∞

IV Vergelijkingen

9. Eerstegraadsvergelijkingen en -ongelijkheden

9.1 a. $x = 3$ b. $x = 16$ c. $x = -13$ d. $x = 3$ e. $x = -8$

9.2 a. $x = 9$ b. $x = -17$ c. $x = 27$ d. $x = 1$ e. $x = -19$

9.3 a. $x = 1$ b. $x = 5$ c. $x = 2$ d. $x = 3$ e. $x = -1$

9.4 a. $x = -2$ b. $x = -9$ c. $x = -3$ d. $x = -6$ e. $x = -3$

9.5 a. $x = \frac{3}{2}$ b. $x = 7$ c. $x = \frac{7}{2}$ d. $x = 1$ e. $x = \frac{3}{2}$

9.6 a. $x = -21$ b. $x = \frac{1}{3}$ c. $x = - -\frac{5}{6}$ d. $x = -\frac{4}{3}$ e. $x = \frac{19}{5}$

9.7 a. $x = 1$ b. $x = -4$ c. $x = -13$ d. $x = 3$ e. $x = -3$

9.8 a. $x = -3$ b. $x = \frac{3}{4}$ c. $x = -14$ d. $x = \frac{1}{2}$ e. $x = \frac{19}{2}$

9.9 a. $x = 3$ b. $x = \frac{13}{5}$ c. geen oplossing d. $x = \frac{5}{11}$ e. $x = \frac{3}{2}$

9.10 a. $x = \frac{1}{4}$ b. $x = \frac{1}{5}$ c. $x = -2$ d. $x = \frac{3}{2}$ e. $x = \frac{1}{7}$

9.11 a. $x = -3$ b. $x = \frac{1}{8}$ c. $x = -\frac{75}{32}$ d. $x = \frac{45}{2}$ e. $x = -\frac{2}{21}$

9.12 a. $x = -\frac{28}{5}$ b. $x = \frac{26}{5}$ c. $x = -3$

9.13 a. $x = 3$ b. geen oplossing c. $x = \frac{13}{6}$

9.14 a. $x < 2$ b. $x > 14$ c. $x \leq -2$ d. $x \geq -2$ e. $x > 1$

9.15 a. $x > -2$ b. $x < -\frac{1}{3}$ c. $x \geq 3$ d. $x \leq 1$ e. $x < \frac{1}{2}$

9.16 a. $x < -14$ b. $x > 3$ c. $x \leq -\frac{1}{2}$ d. $x \geq -2$ e. $x > \frac{1}{2}$

9.17 a. $x > -1$ b. $x < -7$ c. $x \geq 8$ d. $x \leq -2$ e. $x < 2$

9.18 a. $x < \frac{6}{5}$ b. $x > \frac{9}{2}$ c. $x \leq -3$ d. $x \leq -\frac{1}{3}$ e. $x < -21$

9.19 a. $x > -\frac{12}{5}$ b. $x < -\frac{15}{2}$ c. $x \geq \frac{14}{15}$ d. $x \leq -\frac{1}{3}$ e. $x < -29$

9.20 a. $-4 < x < 3$ b. $-1 < x < 1$ c. $-2 \leq x < 1$ d. $-1 < x \leq \frac{3}{2}$ e. $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

9.21 a. $-1 < x < 4$ b. $3 < x < 4$ c. $1 < x \leq 3$ d. $-\frac{1}{2} \leq x < 2$ e. $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

9.22 a. $x = -\frac{4}{5}$ b. $x = 8$ c. $x = -\frac{1}{5}$ d. $x = \frac{7}{6}$ e. $x = \frac{1}{4}$

9.23 a. $x = \frac{4}{5}$ b. geen oplossing c. geen oplossing (let op!) d. $x = \frac{3}{22}$ e. geen oplossing

9.24 a. $x = 0, x = -2$ b. $x = 1, x = 7$ c. $x = -4, x = 6$ d. $x = \frac{1}{2}, x = -\frac{3}{2}$ e. $x = -1, x = \frac{5}{3}$

9.25 a. $x = -2 \pm \sqrt{3}$ b. $x = 1 \pm \sqrt{2}$ c. $x = 3 \pm \sqrt{5}$ d. $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}$ e. $x = 3 \pm \sqrt{2}$

9.26 a. $x = 2$ b. $x = -6$ c. $x = 0$ d. $x = 2$ e. $x = -\frac{5}{4}$

9.27 a. $x = 1, x = 3$ b. $x = -3, x = 1$ c. $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ d. $x = -3, x = 0$ e. $x = -\frac{1}{3}, x = 3$

9.28 a. $x = 0, x = 2$ b. $x = 0, x = \frac{1}{2}$ c. $x = 0, x = 2$ d. $x = -\frac{2}{3}, x = -8$ e. $x = -1, x = -\frac{3}{5}$

9.29 a. $x = 2, x = -\frac{2}{3}$ b. $x = -\frac{3}{4}$ c. $x = -4, x = -1$ d. $x = \frac{3}{7}, x = \frac{7}{3}$ e. $x = -\frac{1}{10}, x = -\frac{5}{2}$

10. Tweedegraadsvergelijkingen

10.1 a. $x = \pm 3$ b. $x = \pm 2$ c. $x = \pm 2$ d. $x = \pm 3$ e. $x = \pm 7$

10.2 a. $x = \pm\sqrt{2}$ b. geen oplossingen c. $x = \pm 2\sqrt{2}$ d. $x = 0$ e. $x = \pm\sqrt{2}$

10.3 a. $x = \pm 2$ b. $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ c. $x = \pm\frac{2}{3}$ d. $x = \pm\frac{5}{4}$ e. $x = \pm\frac{3}{4}\sqrt{2}$

10.4 a. $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$ b. $x = \pm\frac{3}{2}$ c. geen oplossingen d. $x = \pm\sqrt{14}$ e. $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$

10.5 a. $x = 0, x = -3$ b. $x = -1, x = 5$ c. $x = 1, x = -1$ d. $x = -7, x = 2$ e. $x = 3, x = -9$

10.6 a. $x = 0, x = \frac{1}{2}$ b. $x = -\frac{1}{2}, x = 3$ c. $x = -\frac{2}{3}, x = \frac{3}{2}$ d. $x = -\frac{3}{5}, x = \frac{5}{3}$ e. $x = \frac{2}{3}, x = \frac{3}{2}$

10.7 a. $x = 1, x = -3$ b. $x = 1, x = -5$ c. $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{4}{3}$ d. $x = -\frac{2}{3}, x = -\frac{1}{2}$ e. $x = \frac{2}{3}, x = -\frac{2}{3}$

10.8 a. $x = -6, x = \frac{2}{3}$ b. $x = \frac{6}{5}, x = \frac{6}{7}$ c. $x = \frac{16}{9}, x = \frac{3}{2}$

10.9 a. $x = -2 \pm \sqrt{3}$ b. $x = -3 \pm \sqrt{11}$ c. $x = -4 \pm \sqrt{13}$ d. $x = 1 \pm \sqrt{3}$ e. $x = -5 \pm 2\sqrt{5}$

10.10 a. $x = 6 \pm \sqrt{30}$ b. $x = \frac{13}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{197}$ c. $x = 6, x = -7$ d. $x = 3, x = 9$ e. $x = -3 \pm \sqrt{21}$

10.11 a. $x = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{53}$ b. $x = 1, x = -4$ c. $x = -2$ d. $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$

e. $x = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{93}$

10.12 a. $x = -10 \pm 2\sqrt{10}$ b. $x = 9 \pm \sqrt{161}$ c. $x = -\frac{13}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{337}$ d. $x = 7, x = 8$
e. $x = -20, x = -40$

10.13 a. $x = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{13}$ b. $x = \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}$ c. $x = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{5}$ d. $-\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{19}$
e. $\frac{1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{6}$

10.14 a. $x = -\frac{3}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{33}$ b. $x = -1, -\frac{3}{2}$ c. $x = \frac{1}{3}$ d. $\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{21}$
e. $-\frac{2}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{6}$

10.15 a. $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ b. $x = 1, x = 2$ c. $x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{2}$ d. geen oplossingen
e. $x = \frac{-11 \pm \sqrt{77}}{2}$

10.16 a. $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ b. $x = 1, x = 3$ c. $x = \frac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}$ d. $x = 6 \pm \sqrt{33}$
e. $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

10.17 a. geen oplossingen b. $x = \frac{6 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ c. $x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{3}$ d. $x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
e. $x = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{6}$

10.18 a. $x = \frac{1}{2}, x = -1$ b. geen oplossingen c. $x = -2 \pm \sqrt{5}$ d. $x = \frac{-9 \pm 2\sqrt{39}}{6}$
e. $x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

10.19 a. $x = 1 \pm \sqrt{2}$ b. $x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$ c. $x = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{6}$ d. $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$
e. $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

10.20 a. geen oplossingen b. $x = -\frac{1}{2}, x = 2$ c. $x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{4}$ d. $x = \frac{-9 \pm \sqrt{87}}{6}$
e. geen oplossingen

10.21 a. $x = -1 \pm \sqrt{3}$ b. $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$ c. $x = 1 \pm \sqrt{3}$ d. $x = \frac{-15 \pm \sqrt{385}}{8}$
e. $x = \frac{-5 \pm 3\sqrt{5}}{5}$

10.22 a. $x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$ b. geen oplossingen c. $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ d. $x = \frac{-3 \pm \sqrt{59}}{4}$
e. geen oplossingen

11. Stelsels eerstegraadsvergelijkingen

11.1 a. $x = 2, y = 0$ b. $x = 1, y = 1$ c. $x = 1, y = -1$ d. $x = 2, y = 1$
e. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$

11.2 a. $x = \frac{4}{33}, y = \frac{5}{33}$ b. $x = -2, y = -3$ c. $x = -2, y = -3$
d. $x = 1, y = -2$ e. $x = 3, y = -4$

11.3 a. $x = -2, y = 2$ b. $x = -4, y = -3$ c. $x = 17, y = -10$
d. $x = 27, y = 7$ e. $x = -12, y = -8$

11.4 a. $x = \frac{21}{19}, y = -\frac{11}{19}$ b. $x = -\frac{22}{9}, y = -\frac{4}{3}$ c. $x = -38, y = 9$
d. $x = -4, y = 5$ e. $x = 29, y = 46$

11.5 a. $x = -1, y = 0, z = 2$ b. $x = 1, y = 1, z = 1$ c. $x = 2, y = -1, z = 1$

d. $x = 1, y = 0, z = -2$ e. $x = -1, y = 3, z = 1$

11.6 a. $x = -1, y = 0, z = -1$ b. $x = -1, y = -1, z = 1$ c. $x = -2, y = 1, z = 0$
d. $x = 0, y = 2, z = -1$ e. $x = 2, y = 1, z = -1$

11.7 a. Als je x elimineert, krijg je twee vergelijkingen in y en z die (op een factor na) *hetzelfde* zijn, namelijk $y - 4z = 4$. Elke waarde van z die je kiest, levert via deze vergelijking een bijbehorende waarde van y, namelijk $y = 4z + 4$ en via substitutie ook een waarde van x, namelijk $x = 2y - z = 2(4z + 4) - z = 7z + 8$. Kies je bijvoorbeeld $z = 1$, dan krijg je $y = 8$ en $x = 15$. Omdat de keuze van z vrij is, zijn er nu dus *oneindig veel* oplossingen. Op bladzijde 113 wordt dit alles op een meetkundige manier behandeld.
b. Nu levert eliminatie van x een stelsel van twee vergelijkingen in y en z dat *strijdig* is. Er zijn dus geen oplossingen.
c. Oneindig veel oplossingen. Als je bijvoorbeeld x vrij kiest, is $y = 5 + 2x$ en $z = -1 - x + 3y = -1 - x + 3(5 + 2x) = 14 + 5x$.

11.8 a. Geen oplossingen b. Geen oplossingen c. Oneindig veel oplossingen.

V Meetkunde

12. Lijnen in het vlak

12.1 a. $(1, 0), (0, 1)$ b. $(0, 0)$ c. $(1, 0), (0, 2)$ d. $(2, 0), (0, -1)$ e. $(4, 0), (0, \frac{4}{3})$

12.2 a. $(-3, 0), (0, \frac{3}{4})$ b. $(-5, 0), (0, -\frac{5}{4})$ c. $(0, 0)$ d. $(-2, 0), (0, 7)$
e. $(-\frac{4}{5}, 0), (0, -2)$

12.3 a. $(0, 0)$ b. $(-3, 0)$ c. $(0, 0)$ d. $(0, -1)$ e. $(\frac{1}{3}, 0), (0, -\frac{1}{2})$

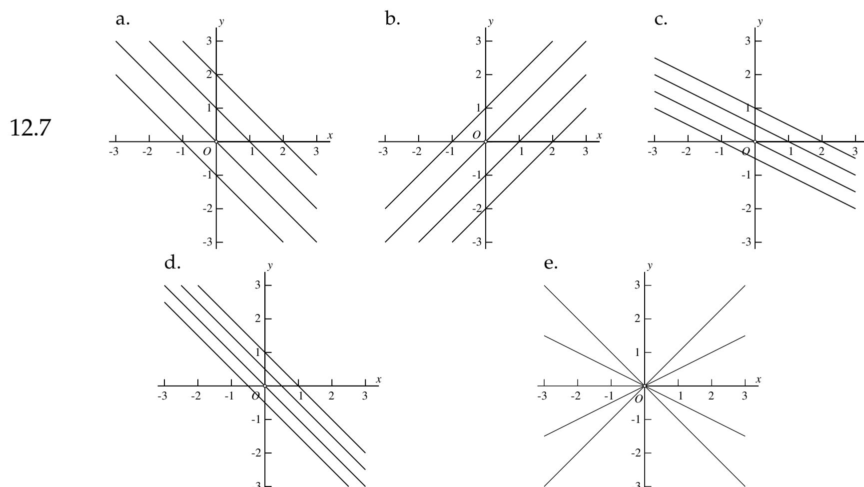
12.4 a. halfvlak links van de y-as b. halfvlak rechts van de verticale lijn door $(-3, 0)$
c. halfvlak rechts van de diagonaallijn $y = x$ d. halfvlak onder de verticale lijn door $(0, -2)$ e. halfvlak links van de lijn $y = 3x$

Bij de opgaven 12.5 en 12.6 geven we geen tekening, maar de snijpunten van de begrenzende lijn met de twee coördinaatassen, alsmede een inwendig punt van het halfvlak. Je kunt dan zelf je tekening gemakkelijk controleren.

12.5 a. $(2, 0), (0, 2), (0, 0)$ b. halfvlak rechts van de lijn $y = 2x$ c. $(1, 0), (0, 2), (0, 0)$
d. $(1, 0), (0, -\frac{2}{3}), (2, 0)$ e. $(\frac{4}{3}, 0), (0, \frac{4}{3}), (2, 0)$

12.6 a. $(\frac{3}{5}, 0), (0, -\frac{3}{4}), (1, 0)$ b. $(\frac{9}{2}, 0), (0, -\frac{9}{7}), (5, 0)$ c. $(-\frac{2}{3}, 0), (0, -2), (-1, 0)$
d. $(-\frac{2}{7}, 0), (0, 2), (-1, 0)$ e. $(-5, 0), (0, -\frac{5}{2}), (0, 0)$

12.7



12.8 a. $x + y = 3$ b. $2x + 3y = 6$ c. $-5x + y = 5$ d. $-5x + 2y = 10$ e. $x = -2$

12.9 a. $2x - 3y = 6$ b. $x = 3$ c. $5x + 2y = 10$ d. $x + y = 0$ e. $x - y = 2$

12.10 a. $x + y = 3$ b. $-2x + 4y = 4$ c. $4x - 2y = -6$ d. $6x - 2y = -16$
e. $x - 5y = 9$

12.11 a. $7x - 2y = 11$ b. $x - y = 6$ c. $4x - 5y = -9$ d. $4x - y = 14$
e. $2x - 5y = 13$

12.12 a. $x + 4y = 0$ b. $3x - 2y = 0$ c. $5x + 2y = -5$ d. $x + y = 1$ e. $2x + y = -4$

12.13 a. $x + y = 10$ b. $y = -1$ c. $5x + 4y = 17$ d. $3x - 5y = 34$ e. $8x - y = 9$

12.14 a. ja b. ja c. ja d. ja e. nee

12.15 a. ja b. nee c. nee d. ja e. nee

12.16 a. $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ b. $(3, 0)$ c. $(-\frac{12}{13}, -\frac{4}{13})$ d. evenwijdige lijnen e. $(\frac{61}{56}, -\frac{4}{7})$

12.17 a. $(-\frac{27}{7}, -\frac{29}{14})$ b. $(-\frac{16}{13}, \frac{1}{13})$ c. $(\frac{14}{5}, \frac{7}{10}$ d. $(-\frac{17}{4}, \frac{11}{9})$ e. $(\frac{11}{98}, -\frac{1}{49})$

12.18 a. $(4, -1)$ b. $(4, -5)$ c. $(-3, -\frac{5}{2}$ d. $(\frac{23}{17}, \frac{18}{17})$ e. evenwijdige lijnen

12.19 a. $(\frac{17}{3}, \frac{22}{3})$ b. $(-\frac{43}{47}, -\frac{161}{47})$ c. $(\frac{52}{33}, \frac{101}{132}$ d. samenvallende lijnen e. $(\frac{1}{47}, \frac{81}{47})$

12.20 a. $x + y = 0$ b. $2x - y = 2$ c. $-x + 4y = 12$ d. $-5x + 2y = -7$
e. $8x + 7y = 19$

13. Afstanden en hoeken

13.1 a. 3 b. 4 c. $\sqrt{26}$ d. $2\sqrt{2}$ e. $2\sqrt{10}$

13.2 a. 4 b. $\sqrt{2}$ c. $4\sqrt{2}$ d. $\sqrt{5}$ e. $\sqrt{10}$

13.3 a. $3\sqrt{2}$ b. $\sqrt{2}$ c. $\sqrt{29}$ d. $\sqrt{41}$ e. $\sqrt{5}$

13.4 a. $2\sqrt{5}$ b. $\sqrt{5}$ c. $\sqrt{29}$ d. 5 e. $\sqrt{10}$

13.5 a. $x = y$ b. $4x + 2y = 5$ c. $x = -1$ d. $x + y = 3$ e. $4x + 2y = -15$

13.6 a. $x + 2y = 2$ b. $2x - 4y = 7$ c. $10x + 4y = 21$ d. $6x - 8y = 3$
e. $x + 3y = 3$

13.7 a. $y = 0,\ x = a$ b. $x = y,\ x + y = a + b$ c. $ax + by = 0,\ bx - ay = 0$
d. $ax + by = a + b$ e. $ax + by = a^2 + b^2$

13.8 a. $x = 0$ b. $x + 2y = 10$ c. $x - y = -3$ d. $4x - 3y = 20$
e. $7x - 6y = 19$

13.9 a. $x + y = -1$ b. $-x + 3y = 17$ c. $5x - 8y = 89$ d. $-2x + 9y = 32$
e. $5x - 7y = -16$

13.10 a. $x + y = 4$ b. $y = 2$ c. $2x - y = -6$ d. $5x - y = -27$
e. $2x - 3y = 7$

13.11 a. $x - 2y = -4$ b. $-3x + 4y = 41$ c. $-x + 3y = 25$ d. $2x + 11y = 73$
e. $7x + 5y = 20$

13.12 a. $3x + 2y = 6$ b. $5x - 4y = 23$ c. $7x + y = -6$ d. $3x - 4y = 48$
e. $x + y = -1$

13.13 a. $9x + 4y = 0$ b. $7x - 2y = 6$ c. $5x + y = -9$ d. $5x - 4y = -4$
e. $7x + 2y = -26$

13.14 a. $(-\frac{3}{13}, -\frac{2}{13})$ b. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ c. $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ d. $(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$ e. $(-\frac{9}{10}, -\frac{13}{10})$

13.15 a. $(\frac{21}{17}, \frac{1}{17})$ b. $(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5})$ c. $(-1, 2)$ d. $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ e. $(\frac{16}{5}, \frac{2}{5})$

13.16 a. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 135°$ b. $0, 90°$ c. $\frac{11}{130}\sqrt{130}, 15°$ d. $-\frac{1}{5}\sqrt{5}, 117°$ e. $-1, 180°$

13.17 a. $-\frac{1}{10}\sqrt{10}, 108°$ b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 135°$ c. $\frac{2}{13}\sqrt{13}, 56°$ d. $0, 90°$ e. $-\frac{1}{170}\sqrt{170}, 94°$

13.18 a. 79° b. 65° c. 90° d. 18° e. 45°

13.19 a. 7° b. 27° c. 32° d. 74° e. 15°

14. Cirkels

14.1 a. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ b. $x^2 + y^2 - 4x = 0$ c. $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ e. $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$

14.2 a. $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ b. $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ d. $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 1 = 0$ e. $x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$

14.3 a. $M = (-2, 1), r = 2$ b. $M = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), r = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ c. $M = (-1, -1), r = \sqrt{2}$
d. geen cirkel e. geen cirkel

14.4 a. geen cirkel b. $M = (2, 0), r = 3$ c. $M = (0, 2), r = 0$ d. $M = (0, \frac{1}{3}), r = \frac{1}{3}$
e. geen cirkel

14.5 a. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ b. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ c. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
d. $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e. $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

14.6 a. $x^2+y^2-6x-6y+10=0$ b. $x^2+y^2-2y-4=0$ c. $x^2+y^2-2y-1=0$ d. $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ e. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

14.7 a. $(-2\pm\sqrt{3},0),(0,1)$ b. $(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},0),(0,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})$ c. $(0,0),(-2,0),(0,-2)$ d. $(2,0),(6,0)$ e. $(\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},0),(0,2\pm\sqrt{3})$

14.8 a. $(0,0),(4,0),(0,\pm\sqrt{5})$ b. $(0,1),(0,5)$ c. $(0,2\pm\sqrt{2})$ d. $(0,0),(0,\frac{2}{3})$ e. geen snijpunten

14.9 a. $(2,\pm\sqrt{5})$ b. $(\pm\frac{6}{5}\sqrt{5},\pm\frac{3}{5}\sqrt{5})$ c. $(3,0),(0,3)$ d. $(-3,0),(\frac{9}{5},-\frac{12}{5})$ e. $(\frac{3}{2}\sqrt{2},-\frac{3}{2}\sqrt{2})$

14.10 a. $(\pm 2\sqrt{3},-2)$ b. $(\pm\frac{16}{5},\pm\frac{12}{5})$ c. $(-4,0),(0,-4)$ d. $(4,0),(-\frac{12}{5},-\frac{16}{5})$ e. $(\pm 2\sqrt{3},\pm 2)$

14.11 a. $(0,0),(-1,-1)$ b. $(3\pm\sqrt{2},4\mp\sqrt{2})$ c. $(-1,0),(-6,-5)$ d. $(0,2),(\frac{8}{5},-\frac{14}{5})$ e. $(1,5),(-\frac{1}{5},\frac{13}{5})$

14.12 a. $(1,4),(1,-2)$ b. geen oplossingen c. $(4,-3),(-3,4)$ d. $(-1,1),(-\frac{38}{5},-\frac{6}{5})$ e. $(1,1),(-\frac{3}{5},-\frac{11}{5})$

14.13 a. $(1,\pm\sqrt{3})$ b. $(0,-3),(\frac{12}{5},\frac{9}{5})$ c. $(-3,-4),(-\frac{24}{5},\frac{7}{5})$ d. $(2,0),(0,2)$ e. geen oplossingen

14.14 a. $(0,0),(\frac{2}{5},-\frac{6}{5})$ b. $(0,0),(1,3)$ c. geen oplossingen d. $(1,1),(\frac{11}{5},\frac{17}{5})$ e. geen oplossingen

14.15 a. $(1,2),(-3,-2)$ b. geen oplossingen c. $(-1,0),(-\frac{34}{73},-\frac{104}{73})$ d. $(-1,1),(\frac{1}{5},\frac{23}{5})$ e. $(0,3),(\frac{45}{13},-\frac{4}{13})$

14.16 a. $(1,0)$ b. geen oplossingen c. geen oplossingen d. $(1,-1)$ e. $(2,-3),(\frac{2}{5},\frac{1}{5})$

14.17 a. $x^2+y^2=16$ b. $(x-2)^2+y^2=2$ c. $x^2+(y-2)^2=\frac{36}{25}$ d. $(x+1)^2+(y+1)^2=\frac{9}{5}$ e. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

14.18 a. $x+2y=5$ b. $x-y=2$ c. $y=1$ d. $2x+3y=4$ e. $4x-y=5$

14.19 a. $(0,5),(0,-1)$ b. $-2x+3y=15$ en $2x+3y=-3$

14.20 a. $x=-1\pm\sqrt{3}, y=\pm\sqrt{3}$ b. $x=-2\pm\sqrt{33}, y=3\pm\sqrt{33}$ c. $x=1\pm\sqrt{17}$, $y=2\pm\sqrt{17}$ d. $x=-1\pm\sqrt{17}, y=-4\pm\sqrt{17}$ e. $x=1\pm 2\sqrt{3}, y=3\pm 2\sqrt{3}$

15. Meetkunde in de ruimte

15.1 a. $\sqrt{10}$ b. $3\sqrt{2}$ c. $3\sqrt{3}$ d. 3 e. $\sqrt{33}$

15.2 a. $\sqrt{3}$ b. $\sqrt{11}$ c. $\sqrt{26}$ d. $\sqrt{6}$ e. $\sqrt{11}$

15.3 N.B.: om typografische redenen zetten we de coördinaten van de vectoren naast elkaar, en niet onder elkaar.
a. $(-3,-1,3)$ b. $(-2,-1,1)$ c. $(-1,6,-1)$ d. $(3,2,4)$ e. $(-1,-3,1)$

15.4 a. $(1,-2,-4)$ b. $(-3,2,-2)$ c. $(3,0,6)$ d. $(1,0,-4)$ e. $(1,1,3)$

15.5 a. $-\frac{1}{10}\sqrt{10}, 108°$ b. $-\frac{1}{11}\sqrt{55}, 132°$ c. $-\frac{1}{11}\sqrt{11}, 108°$ d. $-\frac{3}{10}\sqrt{2}, 115°$ e. -1, $180°$

15.6 a. $\frac{1}{15}\sqrt{15}, 75°$ b. $0, 90°$ c. $\frac{1}{35}\sqrt{10}, 85°$ d. $0, 90°$ e. $\frac{1}{30}\sqrt{30}, 79°$

15.7 Het is bijvoorbeeld de hoek tussen de vectoren $(1,1,1)$ en $(1,0,0)$. De cosinus is $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus de hoek is, op gehele graden afgerond, gelijk aan $55°$.

15.8 Ribbenlengte is $2\sqrt{2}$. Loodrechte stand laten zien m.b.v. inproducten.

15.9 Vlak ABC is $-x+y+z=1$, vlak ABD is $x-y+z=1$, vlak ACD is $x+y-z=1$, vlak BCD is $x+y+z=-1$. De cosinus van de hoek tussen twee normaalvectoren, bijvoorbeeld $(-1,1,1)$ en $(1,-1,1)$, is $-\frac{1}{3}$. De hoek tussen de vlakken is dan, in graden afgerond en kleiner dan $90°$ genomen, gelijk aan $71°$.

15.10 Door eerst een ruwe schets te maken, kun je de oplossing raden, en daarna door invullen verifiëren.
a. $x+y+z=1$ b. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ c. $x-y-\frac{z}{3}=1$ d. $z=0$
e. $x+y+z=4$ f. $x=1$ g. $x-y-z=0$ h. $x-y=0$

15.11 a. $x=z$ b. $x+y-4z=6$ c. $x-y+4z=-4$ d. $x+y+z=\frac{3}{2}$ e. $x=z$

15.12 a. $4y-2z+3=0$ b. $-x+2y+z=4$ c. $4x+2y-8z=13$
d. $6x-2y+2z=13$ e. $x=z$

15.13 a. $x=1$ b. $x+z=2$ c. $-2x+3y+z=-2$ d. $x+y-z=0$ e. $y+2z=7$

15.14 a. $3x-2y=-6$ b. $3y-z=11$ c. $3x-y+z=12$ d. $x=6$ e. $y=0$

15.16 a. $3x+2y-4z=16$ b. $2x-2y-3z=4$ c. $-2x+3y-z=5$
d. $5x-y+7z=-16$ e. $x+2z=3$ f. $x=4$

15.17 Zelf doen en verifiëren.

15.18 a. $(\frac{4}{5}, -\frac{1}{4}, \frac{27}{20})$ b. $(0,1,-2)$ c. $(-1,1,0)$ d. De vlakken α en γ zijn evenwijdig. e. De vlakken snijden elkaar in een lijn. Punten op die lijn zijn bijvoorbeeld $(-1,-1,0)$ en $(-9,-3,1)$. f. $(1,-1,1)$ g. De vlakken α en γ zijn gelijk; op de snijlijn van $\alpha=\gamma$ en β liggen bijvoorbeeld de punten $(0,-\frac{14}{3},-5)$ en $(1,-3,-3)$ h. $(0,0,-1)$

15.19 Opgave 11.7 a. Drie vlakken door één lijn. b. De vlakken snijden elkaar twee aan twee in drie evenwijdige lijnen. c. Drie vlakken door één lijn.
Opgave 11.8 a. Drie evenwijdige snijlijnen. b. Drie evenwijdige snijlijnen. c. Drie vlakken door één lijn.

15.20 a. $x^2+y^2+z^2-2z-3=0$ b. $x^2+y^2+z^2-4x-4y+4=0$
c. $x^2+y^2+z^2-2x+6z-15=0$ d. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$
e. $x^2+y^2+z^2+4x-4y-41=0$

15.21 a. $x^2+y^2+z^2-8x-2z-16=0$ b. $x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+1=0$
c. $x^2+y^2+z^2-4x+2z-20=0$ d. $x^2+y^2+z^2-2x-14y+4z+5=0$
e. $x^2+y^2+z^2+10x-4y-2z+21=0$

15.22 a. $M=(-2,1,-1), r=\sqrt{6}$ b. $M=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0), r=\frac{1}{2}\sqrt{6}$

c. $M = (-1, 0, -2), r = \sqrt{5}$ d. $M = (0, 0, 4), r = 2$ e. geen bol

15.23 a. geen bol b. $M = (0, 0, 2), r = 3$ c. $M = (0, 2, 2), r = 2$
d. $M = (0, \frac{1}{3}, 4), r = \frac{1}{3}$ e. geen bol

15.24 a. $x + 2y + 2z = 9$ b. $x - z = 2$ c. $-y + z = 0$ d. $3x + 3y - 2z = 8$
e. $4x - y - 2z = 5$

15.25 a. $y^2 + z^2 - 4y - 4z - 7 = 0$, $x^2 + z^2 - 2x - 4z - 7 = 0$
b. $M = (2, 2), r = \sqrt{15}$, resp. $M = (1, 2), r = 2\sqrt{3}$
c. $(1 \pm 2\sqrt{2}, 0, 0)$, $(0, 2 \pm \sqrt{11}, 0)$ $(0, 0, 2 \pm \sqrt{11})$
d. $\pm\sqrt{2}x - 2y - 2z = 2 \pm \sqrt{2}$, $-x \pm \sqrt{2}y - 2z = 2 \pm 2\sqrt{2}$,
$-x - 2y \pm \sqrt{2}z = 2 \pm 2\sqrt{2}$

VI Functies

16. Functies en grafieken

16.1 a. $-\frac{3}{5}$ b. 2 c. $\frac{1}{2}$ d. 0 e. $-\frac{1}{5}$

16.2 a. $\frac{2}{7}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{5}{2}$ d. $\frac{2}{11}$ e. $\frac{1}{2}$

16.3 a. $18°$ b. $72°$ c. $-53°$ d. $82°$ e. $14°$

16.4 a. $68°$ b. $76°$ c. $45°$ d. $-47°$ e. $-72°$

16.5 a. 0.32 b. 1.25 c. -0.64 d. 1.43 e. 0.24

16.6 a. 1.19 b. 1.33 c. 1 d. -0.83 e. -1.25

16.7 a. $y = 3x$ b. $y = -2x + 1$ c. $y = 0.13x + 1.87$ d. $y = -x$ e. $y = 4x - 11$

16.8 a. $y = -4x + 16$ b. $y = 2.22x - 10.66$ c. $y = -3$ d. $y = -1.5x + 0.5$
e. $y = 0.4x - 1.6$

16.9 a. $(0, -1)$ b. $(0, 7)$ c. $(-1, 0)$ d. $(2, 1)$ e. $(-1, -1)$

16.10 a. $(-3, 4)$ b. $(2, -8)$ c. $(\frac{7}{6}, \frac{73}{12})$ d. $(2, -1)$ e. $(-2, -26)$

16.11 a. $(-1, -4)$ b. $(1, -4)$ c. $(-1, -9)$ d. $(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$ e. $(\frac{1}{6}, -\frac{25}{12})$

16.12 a. $(-1, 4)$ b. $(2, 1)$ c. $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ d. $(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8})$ e. $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$

16.13 a. $y = 2x^2$ b. $y = -2x^2$ c. $y = \frac{1}{4}x^2$ d. $y = -\frac{1}{2}x^2$ e. $y = -5x^2$

16.14 a. $y = x^2 + 1$ b. $y = -\frac{1}{4}x^2 - 1$ c. $y = -3x^2 - 2$ d. $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}$
e. $y = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

16.15 a. $y = x^2 - 2x + 3$ b. $y = x^2 + 2x + 3$ c. $y = 2x^2 - 8x + 7$ d. $y = x^2 + 3$
e. $y = 3x^2 + 18x + 27$

16.16 a. $y = \frac{2}{3}x^2$ b. $y = x^2 - x - \frac{1}{4}$ c. $y = 11x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{2}{9}$ d. $y = 2x^2 + \frac{3}{2}$
e. $y = 2x^2 + 3x + \frac{15}{8}$

16.17 Alleen de snijpunten worden gegeven.
a. $(2,4),(-2,0)$ b. $(-2,-1)$ c. $(0,-3),(-1,-2)$ d. $(\frac{1}{2},0),(1,1)$
e. $(-\frac{1}{3},-4),(-1,-2)$

16.18 Alleen de snijpunten worden gegeven.
a. $(0,1)$ b. $(1,0)$ c. $(1,0),(2,5)$ d. $(1,3),(-\frac{1}{3},\frac{7}{9})$ e. $(1,-4)$

16.19 a. $x \leq -2$ of $x \geq 1$ b. $x \leq -1$ of $x \geq 1$ c. $-1 \leq x \leq 2$ d. $x \leq \frac{3-\sqrt{33}}{4}$ of $x \geq \frac{3+\sqrt{33}}{4}$ e. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

16.20 a. $x \leq 0$ of $x \geq 1$ b. $1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$ c. $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ d. $x \leq -1$ of $x \geq \frac{5}{3}$
e. $-\frac{4}{5} \leq x \leq 2$

16.21 a. $-2 < p < 2$ b. $p > \frac{1}{4}$ c. $p < -1$ d. $0 < p < 4$ e. $-6 < p < 2$

16.22 a. geen enkele p b. $p = -\frac{5}{4}$ c. $p = \frac{1}{3}$ d. $-2 < p < 6$ e. $p = -2$

16.23 We geven alleen de twee asymptoten en de eventuele snijpunten met de assen.
a. $x = 1, y = 1, (0,-1)$ b. $x = 0, y = 1, (-1,0)$ c. $x = 2, y = 0, (0,-\frac{3}{4})$ d. $x = 5, y = 2, (0,0)$ e. $x = 2, y = 1, (0,-1), (-2,0)$

16.24 a. $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}, (0,0)$ b. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, (-2,0), (0,-2)$ c. $x = \frac{1}{5}, y = -\frac{2}{5}, (2,0), (0,-4)$ d. $x = -\frac{4}{7}, y = \frac{1}{7}, (-3,0), (0,\frac{3}{4})$ e. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, (\frac{3}{2},0), (0,-\frac{3}{2})$

16.25 a. $x \leq -4$ of $x \geq -2$ b. $0 \leq x \leq 2$ c. $x \leq 0$ of $x \geq 10$ d. $x \leq \frac{3}{4}$
e. $-\frac{1}{5} \leq x \leq 3$

16.26 a. $x \leq -1$ of $x \geq 1$ b. $x \leq -6$ of $x \geq -\frac{2}{5}$ c. $x \leq -3$ of $x \geq 2$
d. $x \leq \frac{2}{7}$ of $x \geq 2$ e. $x \leq -7$ of $x \geq -\frac{1}{3}$

16.27 a. $(-4,-8), (1,2)$ b. $(2,0), (-3,5)$ c. $(-3,1), (4,8)$ d. $(\frac{5}{2},-2, (1,1)$

16.28 a. $(-\frac{2}{3},-7), (2,1)$ b. $(-4,-2), (-1,1)$ c. $(-2,4), (0,2)$ d. $(1,-2, (3,4)$

16.29 Zelf controleren

16.30 Zelf controleren

16.31 Zelf controleren

16.32 Zelf controleren

16.33 a. $0 \leq x \leq 1$ b. $x = 0, x = 1, x = -1$ c. $x \leq -1, x \geq 1, x = 0$ d. $x = 0, x \geq 1$ e. $-1 \leq x \leq 1$

16.34 a. $x = 0, x = 1$ b. $x = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ c. $x \geq 3$ d. $x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e. $x \geq -\frac{1}{2}$

16.35 a. $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ b. $x^2(x-1)(x-2)(x-3)$ c. $x^3(x-1)(x-2)$
d. $x^4(x-1)$ e. x^5 f. x^6+1

16.36 a. $2x^2+3 = (x-1)(2x+2)+5$
b. $x^2-x+2 = (x-2)(x+1)+4$
c. $-2x^2-4x+6 = (x+1)(-2x-2)+8$
d. $x^3+2 = (x-1)(x^2+x+1)+3$

e. $x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = x(x^2 - 3x + 2) + 5$
f. $2x^3 - 4x + 2 = (x+2)(2x^2 - 4x + 4) - 6$
g. $x^4 - 2x^2 + 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - x - 1) + 1$
h. $x^4 - 9x^3 + 6x^2 = (x+1)(x^3 - 10x^2 + 16x - 16) + 16$
i. $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = (x-1)(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 10x + 15) + 21$
j. $x^7 = (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 1$

16.37 a. $2x^4 - 2 = (x-1)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$
b. $x^3 + x^2 + 4 = (x+2)(x^2 - x + 2)$
c. $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
d. $x^4 - 16 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$
e. $x^3 - 3x^2 + 2x = (x-1)(x^2 - 2x)$
f. $2x^3 - 4x + 8 = (x+2)(2x^2 - 4x + 4)$

16.38 a. VIII b. V c. II d. III e. I f. IV g. VII h. IX i. VI

17. Goniometrie

17.1 a. $\frac{\pi}{6}$ b. $\frac{\pi}{4}$ c. $\frac{\pi}{3}$ d. $\frac{7\pi}{18}$ e. $\frac{\pi}{12}$

17.2 a. $\frac{\pi}{9}$ b. $\frac{5\pi}{18}$ c. $\frac{4\pi}{9}$ d. $\frac{5\pi}{9}$ e. $\frac{5\pi}{6}$

17.3 a. $\frac{13\pi}{18}$ b. $\frac{3\pi}{4}$ c. $\frac{10\pi}{9}$ d. $\frac{4\pi}{3}$ e. $\frac{11\pi}{6}$

17.4 a. 30° b. 210° c. 60° d. 120° e. 45°

17.5 a. 225° b. 75° c. 172.5° d. 337.5° e. 345°

17.6 a. 177.5° b. 307.5° c. 250° d. 97.5° e. 155°

17.7 a. 330° b. 85° c. 200° d. 340° e. 155°

17.8 a. 140° b. 70° c. 110° d. 280° e. 110°

17.9 a. 290° b. 215° c. 120° d. 120° e. 10°

17.10 a. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ d. 1 e. $\frac{1}{2}$

17.11 a. 0 b. 0 c. -1 d. 0 e. 0

17.12 a. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ b. -1 c. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ d. $\sqrt{3}$ e. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

17.13 a. $\sqrt{3}$ b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. 1 e. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

17.14 a. -1 b. 0 c. 0 d. 0 e. 1

17.15 a. $-\frac{1}{2}$ b. -1 c. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ d. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ e. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

17.16 a. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ of $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ b. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ of $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
c. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

17.17 a. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ of $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ b. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ of $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$
c. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

17.18 a. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ b. $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ of $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ c. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

17.19 a. $\frac{2}{5}\sqrt{6}$ b. $\frac{3}{7}\sqrt{5}$ c. $\frac{1}{8}\sqrt{55}$ d. $\frac{1}{5}\sqrt{21}$ e. $\frac{2}{7}\sqrt{6}$

17.20 a. $\frac{1}{4}\sqrt{7}$ b. $\frac{1}{6}\sqrt{35}$ c. $\frac{3}{8}\sqrt{7}$ d. $\frac{1}{8}\sqrt{39}$ e. $\frac{12}{13}$

17.21 a. $\frac{5}{31}\sqrt{37}$ b. $\frac{3}{23}\sqrt{57}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$

Bij de opgaven 17.22 tot en met 17.30 geven we alleen de periodelengte en de nulpunten. Telkens is k een willekeurig geheel getal. Controleer hiermee verder zelf je grafieken.

17.22 a. 2π, $x = k\pi$ b. 2π, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ c. π, $x = k\pi$ d. 2π, $x = k\pi$ e. 2π, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

17.23 a. $\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ b. $2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ c. $2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ d. $2\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ e. $\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

17.24 a. $\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ b. $2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ c. $2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ d. $2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ e. $\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

17.25 a. $2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ b. $2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ c. $\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ d. $2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ e. $2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

17.26 a. $\frac{\pi}{2}, x = k\frac{\pi}{2}$ b. $\frac{2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ c. $3\pi, x = \frac{3k\pi}{2}$ d. $\frac{8\pi}{5}, x = \frac{2\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5}$ e. $\frac{\pi}{8}$, $x = \frac{k\pi}{8}$

17.27 a. $\frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$ b. $\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ c. $\pi, x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ d. $4\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e. $3\pi, x = \frac{5\pi}{2} + 3k\pi$

17.28 a. $1, x = \frac{k}{2}$ b. $\frac{2}{3}, x = \frac{1}{2} + \frac{k}{3}$ c. $1, x = k$ d. $1, x = k$ e. $1, x = \frac{1}{6} + \frac{k}{2}$

17.29 a. $\frac{1}{6}, x = \frac{k}{6}$ b. $\frac{1}{2}, x = \frac{1}{8} + \frac{k}{4}$ c. $1, x = \frac{1}{6} + \frac{k}{2}$ d. $\frac{8}{5}, x = \frac{2}{5} + \frac{4k}{5}$ e. $3, x = 3k$

17.30 a. 1, $x = \frac{5}{6} + k$ b. 4, $x = 1 + 2k$ c. $\frac{2}{7}$, $x = \frac{1}{21} + \frac{k}{7}$ d. $\frac{2}{5}$, $x = \frac{3}{20} + \frac{k}{5}$ e. $\frac{4}{3}$, $x = \frac{2}{9} + \frac{4k}{3}$

17.31 We geven de uitwerking van onderdeel (a.). De rest wordt aan de lezer overgelaten.
a. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$
$= 2(1 - \sin^2\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

17.32 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0 \times \cos x + 1 \times \sin x = \sin x$.
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1 \times \cos x - 0 \times \sin x = \cos x$.

17.33 Uitwerken en vereenvoudigen.

17.34 a. Gebruik dat $\sin^2\frac{\pi}{8} = (1 - \cos\frac{\pi}{4})/2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Gevolg: $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
b. $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ c. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ e. $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

17.35 a. $\sin\frac{3}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ c. $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
e. $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

17.36 a. $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ c. $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ d. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ e. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

17.37 a. $-\frac{\pi}{2}$ b. $\frac{\pi}{2}$ c. $-\frac{\pi}{4}$ d. $\frac{\pi}{2}$ e. $\frac{5\pi}{6}$

17.38 a. $-\frac{\pi}{6}$ b. $\frac{3\pi}{4}$ c. $\frac{\pi}{3}$ d. $-\frac{\pi}{3}$ e. π

17.39 a. 0 b. π c. 0 d. $\frac{\pi}{3}$ e. $\frac{\pi}{4}$

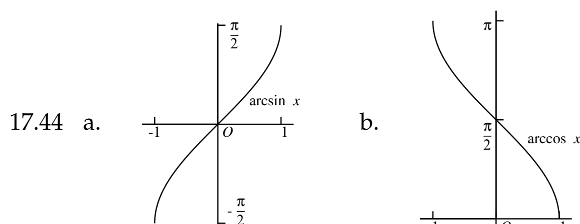
17.40 a. $-\frac{5}{7}$ b. 1 c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

17.41 a. $\frac{4}{5}$ b. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ c. $\frac{4}{5}$ d. $\frac{5}{12}\sqrt{6}$ e. $-\frac{4}{17}\sqrt{17}$

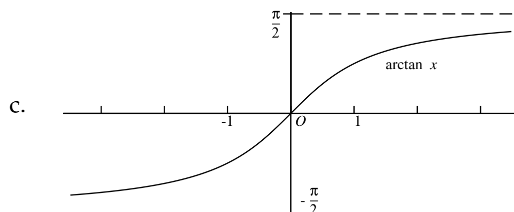
17.42 a. $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$ b. $\frac{\pi}{14}$ c. $-\frac{\pi}{6}$ d. $-\frac{\pi}{10}$ e. $\frac{4\pi}{5}$

17.43 a. $\frac{4}{9}\sqrt{2}$ b. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ c. $\frac{23}{27}$ d. $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{6}\sqrt{18+12\sqrt{2}}$

17.44 a. b.



c.



d. grafiek van (a), gespiegeld in de y-as
e. grafiek van (b), gespiegeld in de y-as

17.45 In plaats van een plaatje geven we enige karakteristieken van de grafiek zodat je je antwoord zelf kunt controleren.
a. domein $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, bereik $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, nulpunt $x = 0$
b. domein $[-2, 2]$, bereik $[0, \pi]$, nulpunt $x = 2$
c. domein $\langle -\infty, \infty \rangle$, bereik $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, nulpunt $x = 0$, horizontale asymptoten: $y = \pm\frac{\pi}{2}$
d. domein $[0, 2]$, bereik $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, nulpunt $x = 1$
e. domein $[-2, 0]$, bereik $[0, \pi]$, nulpunt $x = 0$

17.46 a. domein $\langle -\infty, \infty \rangle$, bereik $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, nulpunt $x = \frac{1}{3}$, horizontale asymptoten: $y = \pm\frac{\pi}{2}$
b. domein $[0, 1]$, bereik $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, nulpunt $x = \frac{1}{2}$
c. domein $[-1, 1]$, bereik $[0, \pi]$, nulpunt $x = -1$
d. domein $\langle -\infty, \infty \rangle$, bereik $[0, \frac{\pi}{2}\rangle$, nulpunt $x = 0$, horizontale asymptoot: $y = \frac{\pi}{2}$

e. domein $\langle -\infty, 0\rangle$ en $\langle 0, \infty\rangle$, bereik $\langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$ en $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, geen nulpunten, horizontale asymptoot: $y = 0$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

17.47 De nulpunten zijn de punten waar $\sin x = 0$, m.u.v. $x = 0$, dus de punten $x = k\pi$, met k geheel, ongelijk aan nul. De grafieken raken elkaar als $\sin x = 1$ of als $\sin x = -1$, dus als $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, met k geheel.

17.48 a. 2 b. 1 c. $\frac{7}{3}$ d. 4 e. $\frac{1}{3}$

17.49 a. 1 b. 16 c. $\frac{2}{3}$ d. 0 e. $\frac{1}{3}$

17.50 a. Stel $y = x - \pi$, dan $x = y + \pi$ en $y \to 0$ als $x \to \pi$, dus
$\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi} = \lim y \to 0 \dfrac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim y \to 0 \dfrac{-\sin y}{y} = -1$
b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{3}$ d. 1 (stel $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, dan $x = \cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin y$) e. $\sqrt{2}$

17.51 a. 1 b. $\frac{2}{3}$ c. 1 d. 1 e. 1

17.52 a. $a = 1.5898, b = 2.5441$ b. $a = 1.7820, b = 0.9080$ c. $b = 1.9314, c = 2.7803$ d. $a = 6.9734, b = 0.6101$ e. $a = 0.6377, c = 3.0670$

17.53 a. $b = 7.0676, b = 7.6780$ b. $a = 2.3007, c = 3.0485$ c. $a = 7.7624, b = 1.9354$ d. $a = 0.7677, c = 2.1423$ e. $a = 1.2229, c = 4.1828$

17.54 a. $a = 2.6736, b = 1.3608$ b. $a = 1.9177, b = 3.5103$ c. $b = 9.8663, c = 10.0670$ d. $a = 18.0051, c = 19.3179$ e. $b = 3.5617, c = 4.6568$

17.55 Voor het bewijs van de sinusregel maakt het niets uit: nog steeds geldt dat $h = b\sin\alpha = a\sin\beta$. Voor de cosinusregel geldt dat $DA = -b\cos\alpha$ want de cosinus is negatief. Het bewijs gaat dan verder als volgt:
$a^2 = h^2 + DB^2 = b^2 - DA^2 + (DA + c)^2 = b^2 + 2DA\,c + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

17.56 a. $b = 4.3560$, $O = 5.3524$ b. $a = 2.6994$, $O = 1.0980$ c. $c = 7.9806$, $O = 15.9394$ d. $\gamma = 0.6214$, $O = 6.9731$ e. $\alpha = 0.2983$, $O = 3.1983$ f. $\gamma = 0.6029$, $O = 3.4024$ g. $\gamma = 1.4455$, $O = 9.9216$ h. $\alpha = 0.7227$, $O = 7.9373$ i. $a = 8.5965$, $O = 14.6492$ j. $a = 3.0155$, $O = 2.8366$ k. $c = 6.8946$, $O = 14.6175$

18. Exponentiële en logaritmische functies

Opmerking vooraf: overal waar in de opgaven gevraagd is grafieken te tekenen, kun je je antwoord zelf controleren met behulp van een grafische rekenmachine of een computeralgebrapakket. Het is echter van groot belang dat je zo'n controle pas *achteraf* uitvoert: in dit stadium van het leerproces moet je eerst zelf een ruwe schets maken waaruit de belangrijke karakteristieken van de grafiek blijken, met name de eventuele nulpunten en asymptoten. Dan kun je ook met verstand het venster kiezen dat je op de apparatuur wilt zien.

18.7 a. 0 b. 0 c. 0 d. 0 e. 0

18.8 a. 0 b. 0 c. 0 (noem $y = -x$) d. 0 e. 0

18.9 a. 0 (noem $y = -x$) b. 0 c. $-\infty$ d. 0 (stel $y = -x$ en bedenk dat $2^3 = 8 <$

$3^2 = 9$) e. $-\infty$

18.16 a. 0 b. 0 c. 0 d. 0 e. 0

18.17 a. 0 b. 0 c. 0 d. 0 e. 0

18.21 a. -1 b. 2 c. -3 d. a e. 0

18.22 a. e (stel $y = x - 1$) b. e^2 c. e^a d. 1 e. 1

18.26 a. -1 b. 2 c. $-\frac{3}{2}$ d. 0 e. -1

18.27 a. $\frac{1}{\ln 2}$ b. $\frac{-1}{\ln 3}$ c. $\frac{1}{2}$ (schrijf eerst $y = x - 2$ en daarna $2 + y = 2(1 + \frac{y}{2})$) d. $\frac{1}{3}$ e. $\frac{1}{a}$

19. Geparametriseerde krommen

19.1 invullen en uitwerken

19.2 $(3 \sin t, 2 \cos t)$

19.3 a. $(2 \cos t, 2 \sin t)$ b. $(-1 + 3 \cos t, 3 + 3 \sin t)$ c. $(2 + 5 \cos t, -3 + 5 \sin t)$ d. $(-1 + 2t, 1 - 3t)$ e. $(1 - t, 2t)$ f. $(t, 2)$

19.4 a. V b. VIII c. VII d. III e. I f. II g. VI h. IV

19.5 a. Linkertak: $t < 0$, rechtertak: $t > 0$.
Asymptoten kun je krijgen als x of y naar oneindig gaan, en dat gebeurt als $t \to \infty$, $t \to -\infty$, $t \downarrow 0$ of $t \uparrow 0$. Als $t \to \pm\infty$ gaat $x - y = \frac{2}{t} \to 0$ terwijl x en y beide naar oneindig gaan. De lijn $x - y = 0$ is dan dus een asymptoot.
Als $t \downarrow 0$ of $t \uparrow 0$ gaat $x + y = 2t \to 0$ terwijl x en y beide naar oneindig gaan (met tegengesteld teken). De lijn $x + y = 0$ is dus ook een asymptoot.

19.7 $d^2 = (r_1 \cos\varphi - r_2)^2 + (r_1 \sin\varphi)^2 = r_1^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi$

19.8 a. VI b. I c. II d. III e. VII f. VIII g. IV h. V

19.9 a. $(-t, 1, 1 + t)$ b. $(1 + t, -1 + t, 1 - t)$ c. $(3 - 2t, -t, 1 - t)$ d. $(1 - 3t, 4t, -1 + 2t)$ e. $(2 - 2t, -1 + t, -1 - t)$ f. $(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t, \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t, t)$ g. $(-1 - 5t, t, -8t)$ h. $(2 - \frac{3}{5}t, 1 - \frac{9}{5}t, t)$ i. $(t, 2 - 6t, 1 - 4t)$ j. $(-2 + 3t, 5 - 2t, t)$

19.10 a. $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$, $(0, 0, t)$ b. $(1, t, -1)$ c. (t, t, t)

19.11 a. III b. V c. VI d. I e. IV f. VIII g. VII h. II

VII Calculus

20. Differentiëren

20.1 a. $2x$ b. $10x^4$ c. $28x^6$ d. $100x^9$ e. $4 + 3x^2$

20.2 a. $3x^2$ b. $2x-2$ c. $4x^3-9x^2$ d. $64x^7$ e. $6x^5-24x^3$

20.3 a. $16x^3-6x$ b. $4000000x^{1999}$ c. $49x^6-36x^5$ d. $3x^2+49x^6$ e. $2x-15x^2+1$

20.4 a. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ b. $\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ c. $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ d. $\frac{1}{2}((x-1)^{-\frac{1}{2}}+(x+1)^{-\frac{1}{2}})$ e. $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$

20.5 a. $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ b. $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ c. $\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ d. $\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{4}}$ e. $\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$

20.6 a. $\frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}}$ b. $\frac{3}{2}\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}}$ c. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{2}{3}}$ d. $\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$ e. $\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$

20.7 a. $-x^{-2}$ b. $-4x^{-3}$ c. $-9x^{-4}$ d. $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ e. $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

20.8 a. $2.2x^{1.2}$ b. $4.7x^{3.7}$ c. $-1.6x^{-2.6}$ d. $0.333x^{-0.667}$ e. $-0.123x^{-0.877}$

20.9 a. $\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ b. $-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$ c. $-3(x-3)^{-4}$ d. $-\frac{1}{5}(x-5)^{-\frac{6}{5}}$ e. $-50(x+50)^{-51}$

20.10 a. $y=-5+4x$ b. $y=10+11x$ c. $y=-3+2x$ d. $y=-1152+704x$ e. $y=4+11x$

20.11 a. $y=-7+5x$ b. $y=-22+\frac{29}{4}x$ c. $y=-3+x$ d. $y=3-4x$ e. $y=18+20x$

20.12 a. $2\mathrm{e}^{2x+1}$ b. $-\mathrm{e}^{1-x}$ c. $-2\mathrm{e}^{-x}$ d. $-3\mathrm{e}^{1-x}$ e. $2x\mathrm{e}^{x^2}$

20.13 a. $(2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x+1}$ b. $-2x\mathrm{e}^{1-x^2}$ c. $-3\mathrm{e}^{3-x}$ d. $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ e. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{1+\sqrt{x}}$

20.14 a. $(\ln 2)\,2^{x+2}$ b. $(-\ln 3)\,3^{1-x}$ c. $(-3\ln 2)\,2^{2-3x}$ d. $(2x\ln 5)\,5^{x^2}$ e. $(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\ln 3)\,3^{\sqrt[3]{x}}$

20.15 a. $\frac{-2}{1-2x}$ b. $\frac{6x}{3x^2-8}$ c. $\frac{3-8x}{3x-4x^2}$ d. $\frac{3x^2+6x^5}{x^3+x^6}$ e. $\frac{2x}{x^2+1}$

20.16 a. $\frac{1}{2x+2}$ b. $\frac{2}{x}$ c. $\frac{1}{3x}$ d. $\frac{1}{3x-3}$ e. $\frac{2}{x-4}$

20.17 a. $\frac{1}{x\ln 2}$ b. $\frac{3}{x\ln 3}$ c. $\frac{1}{(x+1)\ln 10}$ d. $\frac{1}{(2x+2)\ln 10}$ e. $\frac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 2}$

20.18 a. $x=1$ b. $x=1, x=-1$ c. $x=0$ d. $x=2$ e. $x=0$

20.19 a. $x=0$ b. geen enkele x c. $x=k\pi$ (k geheel) d. $x=0$ e. $x=0$

20.20 a. $\cos(x-3)$ b. $-2\sin(2x+5)$ c. $3\cos(3x-4)$ d. $-2x\sin(x^2)$ e. $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

20.21 a. $\frac{1}{\cos^2(x+2)}$ b. $\frac{2}{\cos^2(2x-4)}$ c. $2x\cos(x^2-1)$ d. $\frac{\sin(1/x)}{x^2}$ e. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\cos^2\sqrt[3]{x}}$

20.22 a. $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ b. $\frac{1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$ c. 0 (Dit betekent dus dat $\arcsin x+\arccos x$ constant is! Wat is die constante, en kun je dit verklaren?) d. $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ e. $-\tan x$

20.23 a. $\sin x+x\cos x$ b. $\cos 2x-2x\sin 2x$ c. $2x\ln x+x$ d. $\tan x+\frac{x+1}{\cos^2 x}$ e. $2\ln x+\frac{2x+1}{x}$

20.24 a. $\frac{\ln x}{2\sqrt{x+1}}+\frac{\sqrt{x}}{x}$ b. $\cos x\ln x^2+\frac{2\sin x}{x}$ c. $\ln\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}$ d. $\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x}$ e. $\frac{\ln(1-x^2)}{2\sqrt{x}}-\frac{2x^{3/2}}{1-x^2}$

20.25 a. $2x\ln x + x$ b. $\frac{\ln x^3}{2\sqrt{x}\ln 5} + \frac{3}{\sqrt{x}\ln 5}$ c. $\frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{x-1}{x\ln 2}$ d. $e^{-x} - xe^{-x}$
e. $2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2}$

20.26 a. $\frac{1}{(x+1)^2}$ b. $\frac{2}{(x+1)^2}$ c. $\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ d. $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ e. $\frac{-x^2+x+2}{(x^2+x)^2}$

20.27 a. $\frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ b. $\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ c. $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$ d. $\frac{14}{(4x+1)^2}$ e. $\frac{-1}{(2-x)^2}$

20.28 a. $\frac{1}{1+\cos x}$ b. $\frac{-x\sin x - \sin x\cos x}{(1+x)^2}$ c. $\frac{x+1-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(x+1)^2}$ d. $\frac{\sin x - x\cos x\ln x}{x\sin^2 x}$ e. $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

20.29 a. $-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$ b. $\frac{-4}{(x+1)^3}$ c. $\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ d. $\frac{1}{x}$ e. $2\cos x - x\sin x$
f. $2\cos 2x - 8x\sin 2x - 4x^2\cos 2x$

20.30 a. $-\frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+cos\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}$ b. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ c. $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ d. $\frac{3x-4}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$ e. $\frac{(2-x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$
f. $2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

20.31 a. 0 b. 10! c. $11!x$ d. e^{-x} e. $2^{10}e^{2x}$ f. e^{x+1}

20.32 a. $10!(x+1)^{-11}$ b. $-10!x^{-10}$ c. $-2^{10}\sin 2x$ d. $-\sin(x+\frac{\pi}{4})$ e. $(10+x)e^x$
f. $(-10+x)e^{-x}$

20.33 Zie bladzijde 179.

20.34 $f(x)$ V, $f'(x)$ VI, $f''(x)$ II, $g(x)$ III, $g'(x)$ I, $g''(x)$ IV (of f en g verwisseld)

20.35 $f(x)$ II, $f'(x)$ I, $f''(x)$ V, $g(x)$ III, $g'(x)$ VI, $g''(x)$ IV (of f en g verwisseld)

20.36 a. waar. b. niet waar; tegenvoorbeeld: een constante functie. c. waar. d. niet waar; tegenvoorbeeld: een constante functie. e. niet waar; tegenvoorbeeld: $f(x) = x^3$ op $\mathbb{R}$.

20.37 a. niet waar; tegenvoorbeeld $f(x) = x$ op $\mathbb{R}$. b. waar. c. waar. d. waar.

20.38 a. waar. b. niet waar; tegenvoorbeeld $f(x) = g(x) = x$.

20.39 a. $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (lokaal maximum) $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (lokaal minimum) b. $x = -1$ (l. min.) $x = 0$ (l. max.) $x = 1$ (l. min.) c. $x = -\sqrt{3}$ (l. min.) $x = 0$ (l. max.) $x = \sqrt{3}$ (l. min.) d. $x = 1$ (g. min.) e. $x = -1$ (g. min.) $x = 0$ (l. max.) $x = 1$ (g. min.)

20.40 a. $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ (g. max.), $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ (g. min.) (k geheel)
b. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi}$ (g. max.), $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$ (g. min.) (k positief en geheel), $x = 0$ (l. min.)
c. $x = (\frac{1}{2}\pi + 2k\pi)^2$ (g. max.), $x = (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)^2$ (g. min.) (k positief en geheel), $x = 0$ (lokaal randminimum)
d. $x = \pm\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ (g. max.), $x = \pm\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ (g. min.) (k positief en geheel), $x = 0$ (l. min.)
e. $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (g. max.), $x = k\pi$ (g. min.) (k geheel)

20.41 a. $x = \frac{1}{e}$ (g. min), $x = 0$ (l. randmax.) b. $x = 1$ (g. min.) c. $x = -1$ (g. min.), $x = 1$ (g. max.) d. $x = 2k\pi$ (g. max.) (k geheel) e. $x = k\pi$ (g. max.) (k geheel)

20.42 a. $x = -1$ (g. min.) b. $x = 0$ (g. max.) c. $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (g. min.), $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(g. max.) d. $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ (g. max.), $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ (g. min.) (k geheel) e. $x = 0$ (g. max.)

20.43 a. $x = \frac{1}{k}$ (k geheel, niet nul)
b. globale maxima: $x = \frac{2}{1+4k}$, globale minima: $x = \frac{2}{3+4k}$ (k geheel)
c. beide limieten zijn 0
d. de limiet bestaat niet: elke omgeving van 0 bevat punten waar $f(x) = 1$ en punten waar $f(x) = -1$ is.

20.44 a. $x = 0$ is het enige stationaire punt; het is tevens het enige buigpunt b. st.p.: $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, b.p.: $x = 0$ c. st.p.: $x = 1$, b.p.: $x = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6}$ d. st.p.: $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{4}$, b.p.: $x = -1$ e. st.p.: $x = 0$, b.p.: $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$

20.45 a. st.p.: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, b.p.: $x = k\pi$ (k geheel) b. geen st.p., b.p.: $x = 0$ c. st.p.: $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$, b.p.: $x = \frac{1}{e\sqrt{e}}$ d. st.p.: $x = 1$, b.p.: $x = 2$ e. st.p.: $x = 0$, b.p.: $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

20.46 a. $-1 \leq \sin\frac{\pi}{x} \leq 1$ voor alle $x \neq 0$, dus $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ (ook voor $x = 0$). Gelijkheid als de sinus ± 1 is, dus $f(x) = -x^2$ als $x = \frac{2}{3+4k}$ en $f(x) = x^2$ als $x = \frac{2}{1+4k}$ (k geheel), en natuurlijk ook als $x = 0$.
b. $f'(x) = 2x\sin\frac{\pi}{x} - \pi\cos\frac{\pi}{x}$.
c. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x} = 0$ want de sinus is in absolute waarde altijd kleiner dan of gelijk aan 1.
d. $f'(\frac{1}{2k}) = -\pi$ en $f'(\frac{1}{2k+1}) = \pi$.
e. Uit het vorige onderdeel volgt dat elke omgeving van 0 punten bevat waar $f(x) = \pi$ en $f(x) = -\pi$. De limiet bestaat dus niet.
f. Nee. g. Nee. h. Nee

21. Differentialen en integralen

21.1 a. $(6x+2)\,dx$ b. $(1+2\cos 2x)\,dx$ c. $(8x\sin(x+1)+4x^2\cos(x+1))\,dx$
d. $\left(3x^2\sqrt{x^3+1}+\frac{3x^5}{2\sqrt{x^3+1}}\right)dx$ e. $-2x\sin(x^2)\,dx$

21.2 a. $\frac{2x}{x^2+1}\,dx$ b. $2x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ c. $-\sin x\mathrm{e}^{\cos x}\,dx$ d. $(1+\frac{1}{x^2})\,dx$

21.3 a. $(15x^2-\frac{6x}{(x^2+1)^2})\,dx$ b. $4(x+4)^3\,dx$ c. $(4x^3\sin 2x+2(x^4-1)\cos 2x)\,dx$
d. $\frac{1}{4}(x+1)^{-3/4}\,dx$ e. $\frac{1}{\cos^2(x+5)}\,dx$

21.4 a. $(\frac{2}{3}x^{-1/3}-\frac{2}{3}x^{-5/3})\,dx$ b. $(1-\frac{2x}{x^2+1})\,dx$ c. $-2\cos 2x\mathrm{e}^{-\sin 2x}\,dx$
d. $\frac{4x}{(1-x^2)^2}\,dx$

21.5 a. $d(x^3+x^2+2x)$ b. $d(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{3/2})$ c. $d(\frac{1}{5}x^5-x^4+x^2-5x)$
d. $d(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2})$ e. $d(\ln x)$

21.6 a. $d(\frac{3}{4}x^{4/3})$ b. $d(3x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cos 2x)$ c. $d(-\cos(x+1))$ d. $d(\frac{1}{2}\sin(2x+1))$
e. $d(\ln(-x))$

21.7 a. $f(x_m) = 5.511376, k = 0.043$ b. $f(x_m) = 1.04511376, k = 0.00043$ c. $f(x_m) = -0.648656$, $k = 0.0078$ d. $f(x_m) = -163.8656$, $k = 0.78$ e. $f(x_m) = 0.8688021$,

$k = 0.0050$ f. $f(x_m) = 4.333383$, $k = 0.20$ g. $f(x_m) = -0.8223451$, $k = 0.0023$ h. $f(x_m) = 1.480239974$, $k = 0.0023$ i. $f(x_m) = 3.782825067$, $k = 0.0023$ j. $f(x_m) = 0.3351206434$, $k = 0.0012$

21.8 Zelf controleren.

21.9 We maken gebruik van de ongelijkheid $|a \pm b| \leq |a| + |b|$, die voor alle reële getallen a en b geldig is.
a. $|(x_m + y_m) - (x_w + y_w)| = |(x_m - x_w) + (y_m - y_w)| \leq |x_m - x_w| + |y_m - y_w| \leq h_x + h_y$
b. $|(x_m - y_m) - (x_w - y_w)| = |(x_m - x_w) - (y_m - y_w)| \leq |x_m - x_w| + |y_m - y_w| \leq h_x + h_y$
c. $\frac{|x_m y_m - x_w y_w|}{|x_m y_m|} = \frac{|(x_m - x_w) y_m + x_w (y_m - y_w)|}{|x_m y_m|} \leq \frac{h_x}{|x_m|} + \frac{|x_w|}{|x_m|} \frac{h_y}{|y_m|} \approx q_x + q_y$ als we aannemen dat x_m en x_w zo weinig van elkaar verschillen dat $x_m / x_w \approx 1$ is.
d. $\frac{|x_m / y_m - x_w / y_w|}{|x_m / y_m|} = \frac{|x_m y_w - x_w y_m|}{|x_m y_w|} = \frac{|(x_m - x_w) y_w + x_w (y_w - y_m)|}{|x_m y_w|} \leq \frac{h_x}{|x_m|} + \frac{|x_w|}{|x_m|} \frac{|y_m|}{|y_w|} \frac{h_y}{|y_m|} \approx q_x + q_y$ als we aannemen dat x_m en x_w, respectievelijk y_m en y_w, zo weinig van elkaar verschillen dat $x_m / x_w \approx 1$, respectievelijk $y_w / y_m \approx 1$ is.

21.10 a.

dx	$df = f'(x)\,dx$	Δf	$\Delta f - df$	$\frac{1}{2} f''(x)\,(dx)^2$
0.1	0.4	0.41	0.01	0.01
0.01	0.04	0.0401	0.0001	0.0001
0.001	0.004	0.004001	0.000001	0.000001
0.0001	0.0004	0.00040001	0.00000001	0.00000001

b.

dx	$df = f'(x)\,dx$	Δf	$\Delta f - df$	$\frac{1}{2} f''(x)\,(dx)^2$
0.1	0.1	0.09531	−0.00468982	−0.005000
0.01	0.01	0.00995033	−0.000049669	−0.00005000
0.001	0.001	0.0009950033	−0.0000004996669	−0.0000005000
0.0001	0.0001	0.0000999950	−0.00000000499967	−0.000000005000

c.

dx	$df = f'(x)\,dx$	Δf	$\Delta f - df$	$\frac{1}{2} f''(x)\,(dx)^2$
0.1	0.2	0.22304888	0.02304888	0.02000
0.01	0.02	0.020202701	0.000202701	0.0002000
0.001	0.002	0.002002003	0.000002003	0.000002000
0.0001	0.0002	0.000200020	0.00000002000	0.00000002000

d.

dx	$df = f'(x)\,dx$	Δf	$\Delta f - df$	$\frac{1}{2} f''(x)\,(dx)^2$
0.1	0.02	0.01922839	−0.0007716010	−0.0008000
0.01	0.002	0.001992029	−0.000007971000	−0.000008000
0.001	0.0002	0.000199920	−0.000000079970	−0.00000008000
0.0001	0.00002	0.0000199999	−0.00000000079997	−0.0000000008000

e.

dx	$df = f'(x)\,dx$	Δf	$\Delta f - df$	$\frac{1}{2} f''(x)\,(dx)^2$
0.1	0	−0.00499583	−0.00499583	−0.005000
0.01	0	−0.0000499583	−0.0000499583	−0.00005000
0.001	0	−0.000000499999958	−0.000000499999958	−0.0000005000
0.0001	0	−0.000000005000000	−0.000000005000000	−0.0000000050000

f.

dx	$df = f'(x)\,dx$	Δf	$\Delta f - df$	$\frac{1}{2}f''(x)\,(dx)^2$
0.1	0.1	0.0998334	-0.0001665	0
0.01	0.01	0.0099998333	-0.1667×10^{-6}	0
0.001	0.001	0.0009999998333	-0.1667×10^{-9}	0
0.0001	0.0001	0.0000999999998333	-0.1667×10^{-12}	0

Omdat hier $f''(0) = 0$ is, is de lineaire benadering in dit geval nog veel beter: wordt dx tien maal zo klein, dan wordt $\Delta f - df$ ongeveer *duizend* maal zo klein!

21.11 $\frac{1}{4}$

21.12 $\frac{1}{20}$

21.13 2

21.14 2

21.15 $\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$

21.16 a. $\frac{8}{3}$ b. $\frac{20}{3}$ c. $\frac{5}{3}$ d. 2π e. $\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$ f. $\frac{62}{5}$ g. 1 h. $\frac{\pi}{2}$

21.17 a. 10 b. $\frac{73}{6}$ c. 5 d. 2π

21.18 a. $\frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-4})$ b. $\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$ c. $\ln 2$ d. $\frac{\pi}{6}$

21.19 a. $-\frac{78}{5}$ b. $2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$ c. $\frac{15}{8} + 2\ln 2$ d. 0 e. -1

21.20 a. 16 b. $\frac{5}{6}(2\sqrt[5]{2} - 1)$ c. $\frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}$ d. $-2 - \frac{\pi^2}{2}$ e. $\sqrt{2} - 1$

21.21 a. $\frac{3}{\ln 2}$ b. $\mathrm{e} - 1$ c. 0 d. -1 e. 0

21.22 a. $-\frac{\pi}{4}$ b. $\ln 2$ c. $-\frac{2}{3}$ d. $\frac{\pi}{3}$ e. $-\sqrt{3}$

21.23 a. x^2 b. x^2 c. $-x^2$ d. $2x^2$

21.24 a. $-\sin x$ b. $-\sin x$ c. $2\cos 2x$ d. $2\cos x$

21.25 d. $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ e. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$

21.26 a. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ b. $\frac{9}{2}$ c. $\frac{5}{12}$ d. $\frac{12+4\pi}{3\pi}$ e. 1

21.27 $Q = (-2, -8)$, oppervlakte: $\frac{27}{4}$

21.28 a. $\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 - x^2 + 7x + c$ b. $x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$ c. $3x - \frac{1}{2}x^4 + c$
d. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{x} + c$ e. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c$ f. $\frac{3}{4}(x-1)^{4/3} + c$ g. $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$

21.29 a. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$ b. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$ c. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{20}\sin 10x + c$
d. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + c$ e. $\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + c$ f. $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + c$
g. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

21.30 We geven alleen het bewijs van de eerste formule; de andere bewijzen zijn analoog.
$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)\,dx =$
$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x - \frac{1}{n-m}\cos(n-m)x\right]_0^{2\pi} = 0$ want $\cos(n+m)(2\pi) = \cos 0 = 1$ en $\cos(n-m)(2\pi) = \cos 0 = 1$.

21.31 a. $F(x) = \ln(x-1) + c_1$ als $x > 1$, $F(x) = \ln(1-x) + c_2$ als $x < 1$.
b. $F(x) = -\ln(x-2) + c_1$ als $x > 2$, $F(x) = -\ln(2-x) + c_2$ als $x < 2$.
c. $F(x) = \frac{3}{2}\ln(x-\frac{1}{2}) + c_1$ als $x > \frac{1}{2}$, $F(x) = \frac{3}{2}\ln(\frac{1}{2}-x) + c_2$ als $x < \frac{1}{2}$.
d. $F(x) = -\frac{4}{3}\ln(x-\frac{2}{3}) + c_1$ als $x > \frac{2}{3}$, $F(x) = -\frac{4}{3}\ln(\frac{2}{3}-x) + c_2$ als $x < \frac{2}{3}$.
e. $F(x) = -\frac{1}{x} + c_1$ als $x > 0$, $F(x) = -\frac{1}{x} + c_2$ als $x < 0$.
f. $F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} + c_1$ als $x > 1$, $F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} + c_2$ als $x < 1$.

21.32 a. $F(x) = 2\sqrt{x} + c_1$ als $x > 0$, $F(x) = -2\sqrt{-x} + c_2$ als $x < 0$.
b. $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c_1$ als $x > 0$, $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c_2$ als $x < 0$.
c. $F(x) = \frac{5}{4}\sqrt[5]{(x-1)^4} + c_1$ als $x > 1$, $F(x) = \frac{5}{4}\sqrt[5]{(x-1)^4} + c_2$ als $x < 1$.
d. $F(x) = 2\sqrt{x-2} + c_1$ als $x > 2$, $F(x) = -2\sqrt{2-x} + c_2$ als $x < 2$.
e. Op elk interval $\langle -\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi \rangle$ (k geheel) is $F(x) = \tan x + c_k$, waarbij c_k afhangt van dat interval.
f. Op elk interval $\langle -\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + k \rangle$ (k geheel) is $F(x) = \frac{1}{\pi}\tan \pi x + c_k$, waarbij c_k afhangt van dat interval.

22. Integratietechnieken

22.1 a. $\frac{1023}{10}$ b. 868 c. $\frac{2186}{7}$ d. 8502 e. $\frac{455}{2}$ f. 64

22.2 a. $\frac{9217}{110}$ b. $\frac{1}{30}$ c. $-\frac{181}{14}$ d. 0 e. $\frac{511}{18}$ f. $\frac{81}{8}$

22.3 a. $1 - \ln 2$ b. $2 - 2\ln 3$ c. $-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$ d. $-\frac{1}{2}\ln 2$ e. $-\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2$ f. $\frac{1}{8}\ln 2$

22.4 a. $\frac{506}{15}$ b. $\frac{33}{28}$ c. 0 d. $\frac{186}{5}$ e. $\frac{10\sqrt{2}-8}{3}$ f. $\frac{2\sqrt{2}-4}{3}$

22.5 a. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ b. $-\frac{2}{\pi}$ c. 0 d. $\frac{1}{4}$ e. $\frac{3}{8}$ f. $\frac{11}{24}$

22.6 a. $\frac{16}{15}$ b. $\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{2}{3}$ c. $-\ln 2$ d. $2\sin\sqrt{\pi}$ e. $1 - \cos(\frac{1}{2}\sqrt{(2)})$ f. $\ln 3 - \ln 2$

22.7 a. $\frac{e^3}{2} - \frac{1}{2e}$ b. $\frac{1}{2}(e-1)$ c. 0 d. $\frac{1}{3}(e-1)$ e. $\arctan e - \frac{\pi}{4}$ f. $2\sqrt{2} - 2\sqrt{1+\frac{1}{e}}$

22.8 a. $\frac{1}{2}$ b. $\ln 2$ c. $\frac{5}{3} - 2\ln 2$ d. $\frac{\pi}{4}$ e. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$ f. $\frac{\pi}{3}$

22.9 a. 2 b. $\frac{1}{4}(e^2+1)$ c. 1 d. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ e. $\pi^2 - 4$ f. $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$

22.10 a. $\frac{2}{9}(e^3+1)$ b. $2 - \frac{5}{e}$ c. $\frac{5}{e^2} - 1$ d. $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$ e. $\frac{2}{5}(e^{-2\pi} - e^{2\pi})$ f. $\frac{2}{9}(2 + e\sqrt{e})$

22.11 a. 2π b. $2e^2$ c. $\frac{1}{25}(6e^{5/3} + 9)$ d. $\frac{\pi}{2}$ e. $\frac{3}{4}$ f. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$

22.12 a. $\frac{5}{2}$ b. $\frac{3}{4}$ c. $\frac{8}{3} - \sqrt{3}$ d. $(e-1)\ln 2 + 1$ e. π f. $2 - 2\ln 2$

22.13 a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{2}(1 - 5e^{-4})$ c. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ d. 4 e. $\sqrt{e}$ f. $\frac{1}{8}(-2 + 5\arctan 2)$

22.14 a. $\frac{2}{3}\ln 3$ b. $\frac{1}{462}$ c. 0 d. $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ e. $(e + \frac{1}{3})\ln(1+3e) - e$ f. $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$

22.15 a. 1 b. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{1}{9}$ d. $\frac{1}{(p-1)2^{p-1}}$ e. $-\infty$

22.16 a. ∞ b. ∞ c. $\frac{\pi}{2}$ d. ∞ e. ∞

22.17 a. 1 b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{e}$ d. 2 e. 2

22.18 a. 1 b. ∞ c. $-\frac{\pi^2}{8}$ d. bestaat niet e. $\frac{1}{2}$

22.19 a. 2 b. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ c. $\frac{10}{9}$ d. $\frac{2^{1-p}}{1-p}$ e. ∞

22.20 a. ∞ b. 2 c. $-\frac{3}{2}$ d. 4 e. $2+2\sqrt{2}$

22.21 a. 1 b. ∞ c. $2\ln 2-2$ d. $\ln 3-1$ e. $8(\ln 2-1)$

22.22 a. ∞ b. ∞ c. $2\ln 2-2$ d. π e. $-\frac{1}{4}$

22.23 a.

N	$\sum f(x_i)\,dx$	$\sum f(x_i)\,dx - \int f(x)\,dx$
10	1.320000	-0.013333
100	1.33320000	-0.00013333
1000	1.3333320000	-0.0000013333

b.

N	$\sum f(x_i)\,dx$	$\sum f(x_i)\,dx - \int f(x)\,dx$
10	1.3932726	-0.0494224
100	1.4377008	-0.0049942
1000	1.4426950	-0.000499942

c.

N	$\sum f(x_i)\,dx$	$\sum f(x_i)\,dx - \int f(x)\,dx$
10	5.61563	-0.4757
100	6.0460859	-0.045263755
1000	6.0868470	-0.004502638

22.24 a. $M=2$, $\frac{1}{2}M(b-a)\,dx = 0.4$, resp. 0.04, resp. 0.004
b. $M=1.4$, $\frac{1}{2}M(b-a)\,dx = 0.07$, resp. 0.007, resp. 0.0007
c. $M=0.44$, $\frac{1}{2}M(b-a)\,dx = 1.76$, resp. 0.176, resp. 0.0176

22.25 a.

n	$M(n)$	$T(n)$	$S(n)$
8	0.8862269182191298	0.8862268965093698	0.8862269109825432
16	0.8862269139051738	0.8862269073642503	0.8862269117248660
32	0.8862269123605085	0.8862269106347116	0.8862269117852428
64	0.8862269119351357	0.8862269114976102	0.8862269117892939

b.

n	$M(n)$	$T(n)$	$S(n)$
8	0.8769251489660240	0.8710235901875318	0.8749579627065266
16	0.8754486864404032	0.8739743695767780	0.8749572474858615
32	0.8750800387547874	0.8747115280085906	0.8749572018393885
64	0.8749879067668622	0.8748957833816889	0.8749571989718044

c.

n	$M(n)$	$T(n)$	$S(n)$
8	0.9022135976794877	0.8801802371138100	0.8948691441575951
16	0.8966522494458846	0.8911969173966484	0.8948338054294725
32	0.8952851310507982	0.8939245834212664	0.8948316151742876
64	0.8949447892593938	0.8946048572360328	0.8948314785849401

22.26 a. $\int_x^\infty \phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^\infty \phi(t)\,dt - \int_{-\infty}^x \phi(t)\,dt = 1 - \Phi(x)$
b. substitueer $t = -u$: $\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u=\infty}^{u=x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-u)^2} d(-u) =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u=x}^{u=\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \Phi(x)$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\sqrt{\pi}$

22.27 a. $0, 1, -1$ b. analoog aan die van $\Phi(x)$, maar deze grafiek gaat door de oorsprong en heeft de asymptoten $y = \pm 1$. c. $\mathrm{Erf}(x) = 2\Phi(x) - 1$

22.28 a. substitueer $t = -u$: $\mathrm{Si}(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\int_{u=0}^{u=x} \frac{\sin u}{u}\,du = -\mathrm{Si}(x)$
b. lokale maxima bij $x = -\pi + 2k\pi$ en $x = -2k\pi$ ($k > 0$ en geheel), lokale minima bij $x = 2k\pi$ en $x = \pi - 2k\pi$ ($k > 0$ en geheel) c. π d. $\mathrm{Si}(mb) - \mathrm{Si}(ma)$

23. Toepassingen

Om ruimte te sparen noteren we de coördinaten van vectoren naast elkaar en niet onder elkaar.

23.1 a. $(-3\sin 3t, 2\cos 2t)$
b. $(-2\sin 2t, 3\cos 3t)$, nulvector als $t = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
c. $(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$, nulvector als $x = \frac{1}{2}k\pi$
d. $(-3\cos^2 t \sin t, \cos t)$, nulvector als $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$
e. $(-3\cos^2 t \sin t, 2\cos 2t)$
f. $(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t, 3\sin^2 t\cos t)$, nulvector als $t = 2k\pi$
g. $(-\frac{1}{3}(\cos t)^{-2/3}\sin t, \frac{1}{3}(\sin t)^{-2/3}\cos t)$
h. $(-\frac{1}{3}(\cos t)^{-2/3}\sin t, 3\sin^2 t\cos t)$, nulvector als $t = k\pi$

23.2 a. $(-\sin 2\varphi, \cos 2\varphi)$
b. $(-2\sin 2\varphi\cos\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi, -2\sin 2\varphi\sin\varphi + \cos 2\varphi\cos\varphi)$
c. $(-3\sin 3\varphi\cos\varphi - \cos 3\varphi\sin\varphi, -3\sin 3\varphi\sin\varphi + \cos 3\varphi\cos\varphi)$
d. $(\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi\cos\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi, \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi + \sin\frac{1}{2}\varphi\cos\varphi)$
e. $(-\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi\cos\varphi - \cos\frac{3}{2}\varphi\sin\varphi, -\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi\sin\varphi + \cos\frac{3}{2}\varphi\cos\varphi)$
f. $\left(-\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)$
g. $(-\sin\varphi - \sin 2\varphi, \cos\varphi + \cos 2\varphi)$ (merk op: dit is de nulvector als $\varphi = \pi + 2k\pi$)
h. $(-21\sin 7\varphi\cos\varphi - (1 + 3\cos 7\varphi)\sin\varphi, -21\sin 7\varphi\sin\varphi + (1 + 3\cos 7\varphi)\cos\varphi)$

23.3 Radiusvector: $(\mathrm{e}^{c\varphi}\cos\varphi, \mathrm{e}^{c\varphi}\sin\varphi)$ met lengte $\mathrm{e}^{c\varphi}$.
Raakvector: $(c\mathrm{e}^{c\varphi}\cos\varphi - \mathrm{e}^{c\varphi}\sin\varphi, c\mathrm{e}^{c\varphi}\sin\varphi + \mathrm{e}^{c\varphi}\cos\varphi)$ met lengte $\mathrm{e}^{c\varphi}\sqrt{c^2+1}$.
Het inproduct is $c\mathrm{e}^{2c\varphi}$, dus de cosinus van de ingesloten hoek is $\dfrac{c}{\sqrt{c^2+1}}$.
Voor $c = 1$ is die hoek 45°. Merk op dat de hoek 90° is voor $c = 0$ (de spiraal is dan een cirkel), en dat die hoek naar nul daalt als $c \to \infty$.

23.4 a. $(1, 4t, 3t^2)$ b. $(\cos t, 2\cos 2t, -\sin t)$ c. $(\cos t, 2\cos 2t, -3\sin 3t)$
d. $(2\pi\cos 2\pi t, 1, -2\pi\sin 2\pi t)$ e. $(-\sin t, \cos t, 12\sin 12t)$

23.5 a. 2π b. $2\pi R$ c. $\sqrt{4\pi^2R^2 + a^2}$ d. $\frac{\sqrt{c^2+1}}{c}(\mathrm{e}^{2\pi c} - 1)$

23.6 a. $P_{t=0} = (0,0)$, $P_{t=\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{2} - 1, 1)$, $P_{t=\pi} = (\pi, 2)$, $P_{t=\frac{3\pi}{2}} = (\frac{3\pi}{2} + 1, 1)$,

$P_{t=2\pi} = (2\pi, 0)$
b. De middelpuntshoek bij M is t radialen, dus de lengte van de cirkelboog PQ is t, en dat is ook de afstand OQ.
c. Snelheidsvector: $(1 - \cos t, \sin t)$, scalaire snelheid $\sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}} = 2|\sin \frac{t}{2}|$. De snelheid is nul als $t = 2k\pi$ en maximaal (namelijk 2) als $t = \pi + 2k\pi$. De snelheidsvector is dan $(2, 0)$.
d. 8

23.7 $I = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}y\right)^2 dy = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

23.8 $\frac{\pi^2}{2}$

23.9 $\frac{\pi}{2}$

23.10 $\frac{2\pi}{3}$

23.11 π

23.12 ∞

23.13 $\frac{\pi}{2}$

23.14 $\pi(\ln 2)^2 - 2\pi \ln 2 + 2\pi$

23.15 $\frac{3\pi}{10}$

23.16 Het is het omwentelingslichaam dat ontstaat als je de grafiek van de functie $y = \sqrt{R^2 - z^2}$ tussen de grenzen $z = h$ en $z = R$ rond de z-as wentelt. De inhoud daarvan is $\int_h^R \pi(R^2 - z^2)\, dz = \pi(\frac{2}{3}R^3 - R^2 h + \frac{1}{3}h^3)$

23.17 $O = \displaystyle\int_0^h 2\pi \frac{r}{h} y \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dy = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$

23.18 Neem $f(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$ tussen de grenzen $y = -R$ en $y = R$, dan levert de oppervlakteformule $O = \displaystyle\int_{-R}^{R} 2\pi \sqrt{R^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2}}\, dy = 4\pi R^2$

23.19 $2\pi R^2 (R - h)$

23.20 $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$

23.21 $O = \displaystyle\int_1^\infty 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx > \int_1^\infty 2\pi \frac{1}{x}\, dx = \infty$

23.22 1.436

23.23 $P(t + t_d) = 2P(t)$ levert na vereenvoudigen de vergelijking $e^{\lambda t_d} = 2$ (onafhankelijk van t), dus $t_d = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

23.24 Ruwe schatting: $2^{13} < 1000000/100 < 2^{14}$, dus het antwoord zal liggen tussen 13×5 en 14×5. Een berekening geeft $t = 66.43856$.

23.25 Halveringstijd t_h is de tijd waarvoor $e^{\lambda t_h} = \frac{1}{2}$. Voor $\lambda = -0.2$ geeft dit $t_h =$

3.4657359

23.26 Ruwe schatting: $2^{-17} < 0.001/100 < 2^{-16}$, dus het antwoord zal liggen tussen 16×3 en 17×3. Een berekening geeft $t = 49.82892$.

23.27 a. Eenvoudig uitschrijven.
b. idem; noem de 'integratieconstante' $c = a\lambda T$, met andere woorden, neem $T = \frac{c}{a\lambda}$.
c. $T = \dfrac{P_0^{-a}}{a\lambda}$. Als $t \uparrow T$ geldt $a\lambda(T-t) \downarrow 0$ en dus $(a\lambda(T-t))^{-1/a} \to \infty$.
d. $T = 39.810717$ en $P(t) = \frac{1}{(0.39810717 - 0.01t)^5}$.

23.28 a. $dP/dt = \mu(M-P)P$ is slechts afhankelijk van P en niet van t. b. 1.6 c. Beide gelijk aan 1.2 d. Dalende lijnelementen. De oplossingsfuncties dalen voor $t \to \infty$ naar de lijn $P = M$ als horizontale asymptoot. e. Ook hier dalende lijnelementen. Nu geldt dat $P = 0$ een horizontale asymptoot is, maar nu als $t \to -\infty$.

23.29 a. IV b. III c. VIII d. VI e. II f. I g. VII h. V

23.30 In deze opgave is $t_0 = 0$.
a. $t = \frac{\ln 3}{\mu M} \approx 0.68663$ b. $t = -\frac{\ln 3}{\mu M} \approx -0.68663$ c. Invullen en uitwerken. Meetkundig betekent dit dat de grafiek puntsymmetrisch is in $(0, M/2)$.

23.31 Invullen en uitwerken.

23.32 $\ln\left(\frac{P}{P-M}\right) = \mu M t + c$ voor zekere c. Noem $A = \mathrm{e}^{c}$, dan geeft dit $\frac{P}{P-M} = A\mathrm{e}^{\mu M t}$ met als oplossing $P = P(t) = \frac{MA}{A - \mathrm{e}^{-\mu m t}}$. $P_0 = 2M$ geeft $A = 2$. $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$.

23.33 Hieronder zijn a, b, c en A willekeurige constanten.
a. $y^2 - x^2 = c$ b. $ax = by$ c. $y = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ d. $(x+c)y = -1$ en de lijn $y = 0$
e. $y = A\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}$

Trefwoordenregister